

Mini-symposium COAP

Contrôle optimal et applications

Résumé

Ce minisymposium propose des exposés portant sur des applications industrielles de l'optimisation et du contrôle optimal autour de l'évitement de collisions entre des satellites et des débris, du transfert orbital de satellites à poussée faible, de trajectoires contraintes d'avions en phase de montée, du contrôle de micro-nageurs et du problème de contraste en imagerie médicale.

Un accent est porté sur les techniques algorithmiques et numériques développées pour la résolution de ces problèmes de contrôle optimal. On trouvera dans ces exposés des techniques d'optimisation sous contraintes en probabilité, des techniques de contrôle géométrique pour des problèmes sous-riemanniens, des problèmes avec contraintes sur l'état et perturbations singulières, des techniques de moyennation, ou encore des méthodes algébriques formelles pour l'étude de systèmes dynamiques liés aux équations de Bloch.

Organisateur(s)

1. **Olivier Cots**, INP-ENSEEIH-IRIT, Toulouse.

Liste des orateurs

1. **Aude Rondepierre**, INSA Toulouse
Titre : Évaluation du risque et calcul de manoeuvres pour l'évitement de collision.
2. **Lamberto Dell'Elce**, INRIA Sophia Antipolis
Titre : OPTIMAL LOW-THRUST ORBITAL TRANSFER BY AVERAGING MULTIPLE FREQUENCIES.
3. **Damien Goubinat**, Thales Avionics, Toulouse
Titre : Perturbation singulière en contrôle optimal et le problème de montée en temps minimal d'un avion.
4. **Jérémy Rouot**, LAAS-CNRS, Toulouse
Titre : Optimal control theory, sub-Riemannian geometry and swimming of copepod.
5. **Thibault Verron**, INP-ENSEEIH-IRIT, Toulouse
Titre : Méthodes algébriques pour le contrôle de spins en Imagerie à Résonance Magnétique.

Évaluation du risque et calcul de manoeuvres pour l'évitement de collision

A. Rondepierre

Université de Toulouse, Institut de Mathématiques, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse, France

D. Arzelier, M. Joldes

Université de Toulouse; LAAS-CNRS, F-31400 Toulouse, France

R. Serra

Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Glasgow, UK

Depuis la collision entre le satellite russe COSMOS 1934 et un débris de COSMOS 926 en décembre 1991, pas moins de huit collisions ont été recensées en orbite entre des satellites opérationnels, ou entre des satellites et des débris. Les risques de collision sont particulièrement importants sur les orbites basses et les différentes agences spatiales (CNES, ESA, NASA) et les opérateurs du domaine (Airbus Defence and Space, GMV) ont mis en place des procédures d'alerte permettant d'évaluer les risques de collision concernant les satellites contrôlés, et autorisant le déclenchement des manoeuvres d'évitement si le risque de collision est jugé important. Ces procédures ont connu de nombreuses évolutions ces dernières années et le domaine de l'évitement de collision est actuellement en plein développement.

Dans cet exposé, nous nous intéresserons à l'évitement de collision entre un engin spatial opérationnel et un débris orbital. La première partie de l'exposé portera sur l'évaluation du risque. Sous certaines hypothèses, nous expliquerons comment exprimer la probabilité de collision comme l'intégrale d'une fonction gaussienne sur une boule euclidienne, en dimension 2 ou 3, pour laquelle nous avons proposé, dans la thèse de Romain Serra, une nouvelle formule analytique basée sur les théories de la transformée de Laplace et des fonctions holonomes. La seconde partie de cet exposé concernera le calcul de manoeuvres, plus particulièrement dans le cadre des rencontres lentes. Sous l'hypothèse de lois de commande impulsionnelles, le problème d'évitement de collision est formulé comme un problème d'optimisation sous contraintes en probabilité pour lequel nous avons proposé un algorithme de résolution efficace basé les travaux de R. Henrion et A. Möller ainsi que le code d'Alan Genz pour le calcul des probabilités et de leurs gradients.

OPTIMAL LOW-THRUST ORBITAL TRANSFER BY AVERAGING MULTIPLE FREQUENCIES

Lamberto Dell’Elce

Inria, France

Jean-Baptiste Caillau, Jean-Baptiste Pomet

Inria, France

Keywords: Optimal control, Averaging, Resonance, Orbital transfer.

When the state of an Hamiltonian system can be decomposed into slow and fast oscillatory components, averaging the equations of motion over the instantaneous period of the fast variables is a valuable practice to simplify the dynamics of the system and gain understanding of the long-term evolution of the flow. The perturbed Kepler problem belongs to this category. Hence, averaging techniques were exploited in astrodynamics since the early space age to develop efficient analytic or semi-analytic orbital propagators [1]. More recent contributions in optimal control were addressed to the study of extremal flow of low-thrust orbital transfers in energy [2] and time [3] minimization.

Averaging the controlled system facilitates the challenging task of providing a reliable initial guess to shooting algorithms. The quality of this guess can be possibly enhanced if multiple fast-oscillating perturbations are accounted for, e.g., sectorial gravitational harmonics or third-body perturbations. Nonetheless, available results in control consider a single fast variable, namely the angular position of the satellite on a slow-varying orbit.

In this talk, we discuss the orbital transfer problem in the presence of multiple fast oscillating perturbations. Although the enhancement of the realism of the model is appealing, averaging multiple frequencies is only mathematically sound when the instantaneous frequencies are non commensurable. However, important applications exist where near-resonant regions are crossed or even targeted. For example, geosynchronous orbits exhibit a one-to-one resonance between the orbital and the Earth rotation periods. In this case, averaging over the two variables independently lacks a rigorous justification. A preliminary step is to use frequency map analysis [4] to gain insight into this problem.

References

- [1] D. BROUWER, *The Astronomical Journal. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag*, IOP PUBLISHING, 1959.
- [2] B. BONNARD, J. B. CAILLAU, *Forum Mathematicum. Geodesic flow of the averaged controlled Kepler equation*, WALTER DE GRUYTER GMBH, 2009.
- [3] A. BOMBRUN, J. B. POMET, *SIAM Journal on Control and Optimization. The averaged control system of fast-oscillating control systems*, SIAM, 2013.
- [4] J. LASKAR, C. FROESCHLÉ, A. CELLETTI, *Physica D. The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping*, ELSEVIER, 1991.

Perturbation singulière en contrôle optimal et le problème de montée en temps minimal d'un avion.

Damien GOUBINAT

Thales Avionics SA, IRIT/INP-ENSEEIH, France

Olivier COTS

IRIT, INP-ENSEEIH & CNRS, France

Joseph GERGAUD

IRIT, INP-ENSEEIH & CNRS, France

Mots-clefs : perturbation singulière, contrôle géométrique, méthodes numériques

Les problèmes de perturbations singulières sont issus de systèmes dynamiques contenant des écarts importants de constante de temps entre les variables d'états ce qui entraînent des difficultés numériques. Pour des problèmes à valeur initiale, le théorème de Tikhonov qui propose de transformer le système différentiel en un système algèbro-différentiel permet d'obtenir une approximation uniforme de la solution sur tout intervalle de la forme $[a, T]$ avec $a > 0$ et T fixé. Partant de ce constat, en nous basant sur les travaux de [2, 5, 6], nous étudions la réduction de systèmes hamiltoniens contraints aux deux bouts en présence de perturbation singulière. Sous certaines hypothèses de régularités, réduire la dynamique du système initial puis appliquer le principe du maximum est équivalent à appliquer le principe du maximum et réduire le système hamiltonien correspondant. De plus, certaines propriétés du problème de départ se transposent au problème réduit comme par exemple la condition de Legendre qui est conservée.

Cette réduction est ensuite appliquée au problème de contrôle optimal d'un avion en phase de montée, voir [7], en temps minimal. Sous sa forme initiale, le problème est modélisé sous la forme d'un problème de Mayer de dimension 4 avec un contrôle scalaire. Le problème réduit a quant à lui une dynamique en dimension 3 affine en le contrôle. Le principe du maximum, voir [1], est utilisé sur ces deux problèmes de façon à obtenir les extrémales candidates à former la trajectoire optimale. L'optimalité de ces solutions est vérifiée à l'aide des conditions suffisantes du second-ordre, voir [3], au travers d'une analyse numérique utilisant les méthodes indirectes, voir [4]. Enfin les trajectoires sont comparées en termes de critère et de temps de calcul, nous vérifions également la vraisemblance de la trajectoire du problème réduit par rapport à celle du système initial.

Références

- [1] A.A. AGRACHEV, YU.L. SACHKOV *Control theory from the geometric viewpoint*, 2004, pp. 416.
- [2] M.D. ARDEMA. *Phd thesis. Singular perturbations in flight mechanics*, 1977.
- [3] B. BONNARD, J.-B. CAILLAU, E. TRÉLAT *ESAIM : COCV. Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control*, **13**(2), 2007, pp. 207-236.
- [4] J.-B. CAILLAU, O. COTS AND J. GERGAUD, *Optim. Methods Softw. Differential continuation for regular optimal control problems*, **27**(2), 2012, pp. 177-196.
- [5] N. MOISSEV. *Problèmes mathématiques d'analyse des systèmes*, 1985, pp. 467.
- [6] R.E. O'MALLEY. *Singular perturbation methods for ordinary differential equations*, 1991, pp. 234.
- [7] D. POLES *Eurocontrol Technical/Scientific Report. Base of Aircraft Data (BADA) Aircraft Performance Modelling Report*, 2009-09, 2009.

Optimal control theory, sub-Riemannian geometry and swimming of copepod

Jérémy Rouot

LAAS-CNRS, Toulouse, France

Bernard Bonnard

Université de Bourgogne, Dijon, France

Piernicola Bettiol

Université de Bretagne Occidentale , Brest, France

Keywords: Stokes flow, Optimal control theory, sub-Riemannian geometry, Abnormal closed geodesics

We show that the frame of optimal control theory and sub-Riemannian geometry provide powerful tools to tackle the swimming problem at low Reynolds number, focusing on a symmetric 2-link swimmer called the copepod. The Maximum principle is used to select two types of periodic control candidates as minimizers: sinusoidal up to time reparameterization and the sequential paddling, interpreted as an abnormal stroke in sub-Riemannian geometry. Geometric analysis combined with numerical simulations are decisive tools to compute the optimal solutions. A family of simple strokes with small amplitudes emanating from a center is characterized as an invariant of sub-Riemannian geometry and allow to identify the metric used by the swimmer.

Méthodes algébriques pour le contrôle de spins en Imagerie à Résonance Magnétique

Thibaut Verron

Bernard Bonnard, Jean-Charles Faugère, Alain Jacquemard,
Jérémy Rouot, Mohab Safey El Din

Mots-clefs : Contrôle optimal, équation de Bloch, Imagerie à Résonance Magnétique, Méthodes algébriques

L'imagerie à résonance magnétique nucléaire (IRMN ou IRM) est un procédé d'imagerie médicale reposant sur la réaction des substances biologiques à l'application d'un champ magnétique. Cette réponse est modélisée par les équations de Bloch, qui peuvent s'écrire comme un système de 4 équations différentielles en 4 variables d'état et contrôlées par une fonction u . Ces équations font intervenir des paramètres dépendant du système considéré (position et nature des spins). Steffen Glaser et son équipe ont montré [3] que la théorie du contrôle optimal permet de contrôler un spin plus efficacement que les heuristiques généralement utilisées.

L'étude des invariants du système dynamique se ramène à des calculs de nature algébrique, à savoir l'étude de systèmes d'équations polynomiales en les variables d'état et les paramètres du système. Les auteurs de [1] ont montré, sur 4 systèmes expérimentaux, que l'étude de ces systèmes algébriques permet de distinguer les paramètres expérimentaux. Ces calculs utilisaient des bases de Gröbner, dans une situation où les paramètres étaient fixés. Il est possible de poursuivre les mêmes calculs sans spécialiser les paramètres, et d'obtenir ainsi des résultats de classification des paramètres en fonction de propriétés algébriques. Dans [2], les auteurs ont montré comment le calcul de la classification des racines réelles d'un des invariants du système peut être mené en toute généralité sans spécialiser les paramètres.

Ce calcul peut se faire en tirant parti de la structure du système considéré. Par exemple, l'un des invariants est donné par l'ensemble des points singuliers du lieu d'annulation du déterminant d'une matrice. Les points singuliers d'un tel objet s'interprètent géométriquement en fonction du rang de la matrice sous-jacente, et cela permet de mener les calculs de manière plus efficace, en stratifiant les calculs suivant le rang de la matrice. Ces techniques s'étendent à d'autres invariants, par exemple définis en termes de lieu d'annulation d'un produit matrice-vecteur, même sans condition de rang sur la matrice.

L'exposé sera complété par quelques exemples de résultats que l'on a pu obtenir pour le contrôle des équations de Bloch en IRM.

Références

- [1] Bernard Bonnard, Monique Chyba, Alain Jacquemard, and John Marriott. Algebraic geometric classification of the singular flow in the contrast imaging problem in nuclear magnetic resonance. *Mathematical Control and Related Fields*, 3(4):397–432, 2013.
- [2] Bernard Bonnard, Jean-Charles Faugère, Alain Jacquemard, Mohab Safey El Din, and Thibaut Verron. Determinantal sets, singularities and application to optimal control in medical imagery. In *Proceedings of the 2016 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '16, 2016.
- [3] Marc Lapert, Yun Zhang, Martin A. Janich, Steffen J. Glaser, and Dominique Sugny. Exploring the physical limits of saturation contrast in magnetic resonance imaging. *Scientific Reports*, 2(589), 2012.