Mini-symposium StrucSig
Mesures et Signaux structurés

Mini-symposium supporté par le GdR MODE.

Résumé

L'échantillonnage compressé a été et reste un domaine de recherche très actif des mathématiques qui a permis des avancées conséquentes, notamment à l'aide d'outils de la theorie des matrices aléatoires ainsi que de l'analyse harmonique, computationelle, et numérique.

Son applicabilité est néanmoins encore en phase de développement et de recherche.

L'objectif de cette session est de décrire les avancées les plus récentes dans le domaine de l'échantillonage et des mesures structurés, en allant même au-delà de la communauté de l'acquisition compressée.

Organisateur(s)

1. **Jean-Luc Bouchot Bouchot**, RWTH Aachen University.
2. **Claire Boyer**, Université Pierre et Marie Curie.

Liste des orateurs

1. **Clarice Poon**, DAMTP Cambridge
   Titre : Echantillonnage de la transformée de Fourier le long des lignes radiales.
2. **Yann Traonmilin**, INRIA Rennes - Bretagne Atlantique
   Titre : Super-résolution d'impulsions de Diracs par échantillonnage de Fourier aléatoire.
3. **Axel Flinth**, TU Berlin
   Titre : A Technique For Choosing the Weights for Weighted ℓ_1-minimization..
4. **Samuel Vaiter**, CNRS & Université de Bourgogne
   Titre : Titre de l'exposé du quatrième orateur.

Jean-Luc Bouchot, Chair for Mathematics C (Analysis), RWTH Aachen University, Aachen, Germany, `bouchot@mathc.rwth-aachen.de`
Claire Boyer, Laboratoire de Stats, Université Pierre et Marie Curie, `claire.boyer@upmc.fr`
Clarice Poon, DAMTP, University of Cambridge, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WA, UK, `cmhsp2@cam.ac.uk`
Yann Traonmilin, INRIA Rennes - Bretagne Atlantique, Campus de Beaulieu,
FR-35042 Rennes Cedex, France, `yann.traonmilin@inria.fr`
Axel Flinth, Department of Applied Analysis, TU Berlin, Sekretariat MA 5-4, Straße des 17. Juni 136, 10623 Berlin, `flinth@math.tu-berlin.de`
Samuel Vaiter, CNRS & Université de Bourgogne, `samuel.vaiter@u-bourgogne.fr`

Résumés des contributions

Clarice Poon, Echantillonnage de la transformée de Fourier le long des lignes radiales Le problème d'estimation de paramètres d'une superposition de sources ponctuelles est motivé par des applications telles que l'astronomie, la spectroscopie RMN (résonance magnétique nucléaire) et la microscopie, où le signal d'intérêt peut souvent être modélisé par des sources ponctuelles. Ces dernières années, sa reformulation en tant que problème convexe de dimension infinie a fait l'objet recherches intenses au sein de la communauté mathématique [1]. Cependant, ces travaux se sont concentrés sur le cas où l'on échantillonne la transformée de Fourier sur une grille cartésienne. D'autre part, les contraintes physiques peuvent parfois limiter les observations à certaines directions angulaires, et dans le cas de la spectroscopie RMN, on est amené à échantillonner le long de trajectoires continues telles que des lignes radiales.
Dans cette présentation, nous étudions le problème d'estimation de paramètres par minimisation de la variation totale à partir d'échantillons de la transformée de Fourier le long de lignes radiales [2]. Nous montrons d'abord que ce problème de minimisation peut être résolu en considérant une famille finie de problèmes de minimisation unidimensionnels. En s'appuyant sur cette observation, nous présentons un algorithme numérique pour le calcul de solutions à ce problème de dimension infinie.
Sur le plan théorique, nous fournissons des conditions suffisantes sur le nombre de lignes radiales et le nombre d'échantillons le long de ces lignes radiales pour garantir une reconstruction exacte avec forte probabilité. Nos principaux résultats montrent qu'en dimension d, on peut récupérer les paramètres d'une superposition de M sources ponctuelles en échantillonnant sa transformée de Fourier le long de $d+1$ lignes radiales. En outre, le nombre d'échantillons dont nous avons besoin le long de chaque ligne est, à des facteurs logarithmiques près, linéaire en M.

Yann Traonmilin, Super-résolution d'impulsions de Diracs par échantillonnage de Fourier aléatoire Estimer des sommes d'impulsions de Diracs à partir d'observations linéaires en utilisant des méthodes variationnelles convexes a récemment été l'objet de différentes études : il a été montré que si les Diracs sont suffisament séparés, il est possible d'estimer leurs positions après leur convolution par un filtre passe bas [3]. Ce problème de super-résolution a de plus été relié à un problème de reconstruction de densité de probabilité à partir de moments empiriques généralisé ("sketches")[4]. Ces résultats suggèrent qu'une somme d'impulsions de Diracs peut être estimée à partir de mesures de Fourier aléatoires au lieu de mesures régulières des basses fréquences.
Soit δ_t la mesure de Dirac à la position t dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des mesures de Radon. On cherche à retrouver les éléments $\Sigma_{k,\epsilon} = \{\sum_{i=1,k} a_i\delta_{t_i} \; : \forall k \neq l, \|t_k - t_l\|_2 \geq \epsilon, \|t_i\|_\infty \leq 1, \; a_i \in \mathbb{R}_+, t_i \in \mathbb{R}^d\}$ à partir d'observations linéaires. Le paramètre de résolution ϵ représente la séparation minimum entre impulsions. On étudie la reconstruction de $x_0 \in \Sigma_{k,\epsilon}$, à partir d'observations linéaires bruitées $Ax_0 + e$ avec $Ax_0 = (\int_t x_0(t) f_i(t) dt)_{i=1,m}$ où $f_i(t) = e^{j\langle \omega_i, t\rangle}/c_{\omega_i}$, $(\omega_i)_{i=1,m}$ est un ensemble de fréquences de $\mathbb{R}^d$ et c_{ω_i} est une pondération. On compare deux opérateurs :

— A_U **: Echantillonnage de Fourier aléatoire (filtre passe bas)** : les $(\omega_i)_{i=1,m}$ échantillonnent uniformément l'ensemble $[-\frac{\pi q}{2}, \frac{\pi q}{2}]^d$ où q est un entier et $m = (2q+1)^d$. Ici $c_\omega = 1$.

— A_R **: Echantillonnage de Fourier aléatoire pondéré** : Chaque ω_i est une fréquence tirée aléatoirement selon la distribution de probablabilité proportionnelle à $c_\omega e^{-\sigma^2\|\omega\|_2^2/2}$ (où σ est le paramètre réglant la distribution de fréquences, ici $c_\omega = \sqrt{2 + \sigma^2\|\omega\|_2^2 + \sigma^4\|\omega\|_2^4}$ est un terme de pondération).

En dimension un, il est possible d'utiliser une méthode convexe à partir d'observations par A_U si $m \geq \frac{2}{\epsilon}$ [3] ($m \geq O(1/\epsilon)$ est une condition nécessaire pour ces méthodes convexes). On considère la méthode de super-résolution "idéale"

$$x^* = \underset{x\in\Sigma_{k,\epsilon}}{\operatorname{argmin}} \|Ax - (Ax_0 + e)\|_2. \tag{1}$$

On considère de plus une métrique $\|\cdot\| := \|\cdot\|_h = \|h \star \cdot\|_2$ où h est un noyau de convolution gaussien (de variance $1/\sigma^2$) pour quantifier l'erreur de reconstruction. On établit le théorème suivant

Théorème *Soit* $\sigma_k := \frac{1}{2.4(\ln k + 10)}$, $\epsilon > 0$, $\sigma \leq \sigma_k \epsilon$ *et* $h(t) = e^{-\|t\|_2^2/(2\sigma^2)}$.
Supposons $m \geq \; O(k^2 d^3 \mathit{polylog}(k,d)\log(1/\epsilon))$. *Alors, pour tout* $x_0 \in \mathcal{B}$ *et* $y = A_R x_0 + e$, *avec grande probabilité sur le tirage de* A_R, *on a*

$$\|x^* - x_0\|_h \leq C(\|e\|_2 + d_h(x_0, \Sigma)) \tag{2}$$

où x^* est un minimiseur de (1) *et* $d_h(x_0, \Sigma_{k,\epsilon}) = \inf_{x \in \Sigma_{k,\epsilon}} \|x_0 - x\|_h$ *est l'erreur de modélisation.*

Ainsi pour k, d fixés, seulement $m = O(\log(1/\epsilon))$ mesures avec A_R sont suffisantes pour la reconstruction (comparé au cas du filtre passe bas A_U, en dimension un, où $m = O(1/\epsilon)$ sont nécessaires pour les méthodes convexes). Ce théorème donne aussi la distribution selon laquelle on tire A_R. Ces résultats sont confirmés par des expériences utilisant une heuristique approchant la méthode de super-résolution idéale étudiée.

Axel Flinth, A Technique For Choosing the Weights for Weighted ℓ_1-minimization
A prominent approach to the problem of recovering a *sparse* vector $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (meaning that only few coefficients $x_0(i)$ are non-vanishing) from *underdetermined linear measurements* $b = Ax_0$ is ℓ_1-minimization :

$$\min \|x\|_1 \text{ subject to } Ax = b. \qquad (\mathcal{P}_1)$$

For many different types of measurement matrices $A \in \mathbb{R}^{m,d}$, it can be shown that the solution to $(\mathcal{P}_1)$ is equal to an s-sparse ground truth signal x_0 with high probability provided $m \geq Cs\log(d)$.
Sometimes, one knows more about x_0 than that it is sparse. Concretely, one might know that certain sets of indices $S_i \subseteq \{1, \dots, d\}$ are more likely to contain non-zero indices. A proposed method for taking advantage of this additional knowledge is to use a *weighted ℓ_1-norm* in the minimization program :

$$\min \|x\|_{1,w} = \min \sum_{i=1}^{d} w_i |x(i)| \text{ subject to } Ax = b.$$

Choosing the weights is a subtle issue. The general idea is to put lower weights on indices which are likely to be non-zero, but choosing the weights in a clever manner can lead to significantly better results.
In this talk, we will describe a simple and efficient method of finding weights which in a certain sense are optimal for the case of A being Gaussian. The talk is based on the paper [5].

Références

[1] Candès, E.J. and Fernandez-Granda, C., *Towards a mathematical theory of super-resolution* , Communications on Pure and Applied Mathematics, 67(6) :906-956, 2014..

[2] Dossal, C. and Duval, V. and Poon, C., *Sampling the Fourier transform along radial lines*, arXiv preprint arXiv :1612.06752, 2016.

[3] Candès, E.J. and Fernandez-Granda, C., *Super-resolution from noisy data*, Journal of Fourier Analysis and Applications, 19(6) :1229–1254, 2013..

[4] Keriven, and N. Tremblay, N and Traonmilin, Y and Gribonval, R., *Compressive K-means*, ICASSP 2017.

[5] Flinth, A., *Choice of Weights for Sparse Recovery With Prior Information*, *IEEE Trans. Inf. Theory.* 62(7) :4276 - 4284, 2016.