

Mini-symposium GENUAL

Géométrie numérique et algorithmique

Mini-symposium porté par les ANR MAGA et TopData

Résumé

Un certain nombre de problèmes apparaissant dans des domaines variés tels que l'analyse de données en grande dimension, le traitement de la géométrie (geometry processing) ou bien pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles peuvent être traités de manière géométrique et ont été appréhendés ces dernières années avec des notions de géométrie algorithmique.

Le but de ce mini symposium est de présenter des travaux récents dans des domaines très variés et faisant intervenir des diagrammes de Voronoi. Le premier exposé concernera ainsi la discrétisation d'opérateurs différentiels anisotropes avec une application aux équations eikonales. Le second exposé sera un exposé de statistique sur le problème de reconstruction de variété dans un cadre non-asymptotique. Le troisième exposé, plutôt orienté algorithmique, concerne le calcul de diagrammes de Voronoi restreints à des domaines d'intérêts de \mathbb{R}^d .

Organisateur(s)

1. **Boris Thibert**, Laboratoire Jean Kuntzmann, Université Grenoble Alpes.

Liste des orateurs

1. **Jean-Marie Mirebeau**, Laboratoire de mathématiques d'Orsay
Titre : La première réduction de Voronoi, et son application aux équations eikonales anisotropes.
2. **Eddie Aamari**, LMO Orsay et INRIA Saclay
Titre : Reconstruction de variétés via l'estimation d'espaces tangents.
3. **Vincent Nivoliers**, LIRIS, Université Lyon 1
Titre : Diagrammes de Voronoi restreints.

Boris Thibert, LJK - Bâtiment IMAG, 700 Avenue Centrale, Université Grenoble Alpes, 38401 Domaine Universitaire de Saint-Martin-d'Hères, Boris.Thibert@univ-grenoble-alpes.fr

Eddie Aamari, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, eddie.aamari@inria.fr

Jean-Marie Mirebeau, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, jm.mirebeau@gmail.com

Vincent Nivoliers, Université de Lyon, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France, vincent.nivoliers@univ-lyon1.fr

Introduction

Certaines notions fondamentales de géométrie algorithmique, telles que les diagrammes de Voronoi ou bien les diagrammes de puissance, apparaissent naturellement dans différents problèmes de modélisation. A titre d'exemple, on peut citer le fameux algorithme de Llyod pour la discrétisation de mesures continues, qui fait intervenir des diagrammes de Voronoi. Les diagrammes de puissance, qui sont une généralisation des diagrammes de Voronoi, ont été beaucoup utilisés ces dernières années avec les méthodes dites semi-discrètes, pour la discrétisation d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Ces méthodes se sont d'ailleurs révélées particulièrement efficaces numériquement pour la résolution de certaines équations de Monge-Ampère et certains problèmes de transport optimal. Le but de ce minisymposium est de présenter trois travaux récents, issus de domaines très variés et reposant sur la notion de diagramme de Voronoi.

1 La première réduction de Voronoi, et son application aux équations eikonales anisotropes

Motivé par des applications en arithmétique, le mathématicien Voronoi souhaitait classifier les formes quadratiques modulo l'action du groupe des changements de variables à coefficients entiers. Pour cela il introduisit deux constructions invariantes par ce groupe : la première est un certain programme d'optimisation linéaire, tandis que la seconde est le bien connu diagramme de Voronoi, dont les sites sont ici les points à coordonnées entières et dont la fonction distance est donnée par la forme quadratique d'intérêt. Les réductions de Voronoi, conçues pour étudier l'interaction d'une forme quadratique avec un réseau additif, se montrent particulièrement adaptées pour concevoir des schémas de discrétisation d'opérateurs différentiels anisotropes sur des maillages cartésiens. Je décrirai l'application de la première réduction aux Equations eikonales anisotropes, voir la Figure 1.

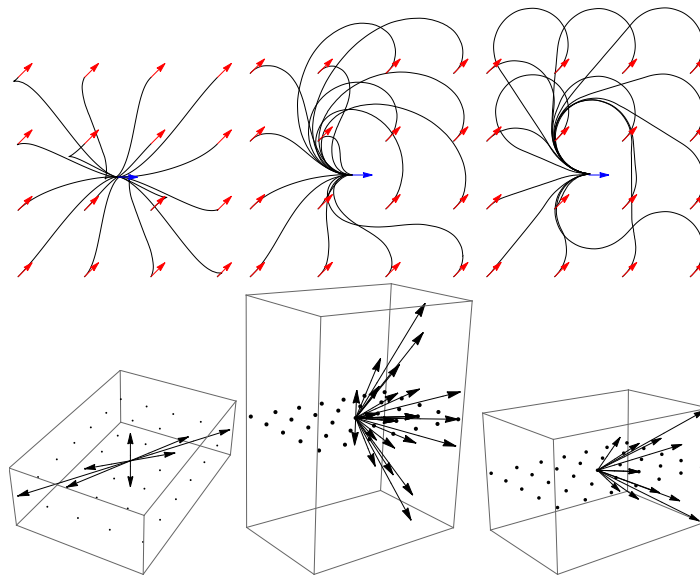


FIGURE 1 – Haut : Plus courts chemins pour les métriques de ReedsShepp, Euler ou Dubins, qui modélisent différentes formes de pénalisation de la courbure, obtenus en résolvant des EDPs eikonales anisotropes dans le domaine $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Bas : Stencil utilisé pour la discrétisation de chaque EDP, construit à l'aide de la première réduction de Voronoi.

2 Reconstruction de variétés via l'estimation d'espaces tangents

Certains types de données, comme la répartition des galaxies dans l'univers, des points sur une surface ou encore des paramètres physiques soumis à des contraintes, peuvent être modélisés comme s'organisant autour d'une structure de dimension réduite, une sous-variété M de dimension d de l'espace ambiant \mathbb{R}^D .

La reconstruction de variété consiste à donner des approximations d'une forme inconnue $M \subset \mathbb{R}^D$ à partir d'un échantillon $\mathbb{X} = \{X_1, \dots, X_n\}$ de points tirés sur ou proche de celle-ci. L'approximation \hat{M} permet alors d'expliquer la structure géométrique ou topologique de M ; structure qui est absente du nuage de point initial composé de n points déconnectés et désorganisés. Proposer une triangulation présente l'avantage de résumer la variété par un objet purement combinatoire, rendant possible le calcul efficace de quantités géométriques ou d'invariants topologiques de M . La qualité d'approximation d'un estimateur \hat{M} de M peut, par exemple, être mesurée par la distance de Hausdorff,

$$d_H(M, \hat{M}) = \|d_M - d_{\hat{M}}\|_\infty,$$

où pour $K \subset \mathbb{R}^D$ $d_K(x) = \inf_{y \in K} \|x - y\|$ désigne la fonction distance à K . Aussi, on peut demander à ce que \hat{M} ait la même topologie que M .

État de l'art. En analyse de données déterministe — lorsque le nuage \mathbb{X} n'est pas considéré comme aléatoire — les résultats récents de [2] donnent un algorithme de reconstruction explicite pourvu que \mathbb{X} est échantillonné de manière assez dense dans M . Celui-ci est basé sur le complexe de Delaunay tangentiel (Figure 2), une version de la triangulation de Delaunay ambiante pour laquelle on ne garde que les simplexes dont la direction est proche des espaces tangents. Schématiquement, les résultats de

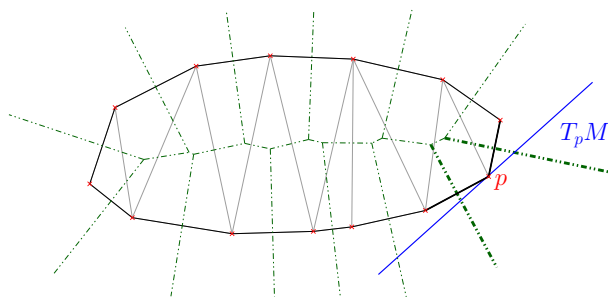


FIGURE 2 – Complexe de Delaunay tangentiel

[2] affirment que sous une hypothèse de type C^2 — le reach, un paramètre d'échelle introduit dans [4] encodant à la fois des propriétés de régularité globale ainsi que de courbure —, si $d_H(M, \mathbb{X}) \leq \varepsilon$, alors le complexe de Delaunay tangentiel \hat{M}_{TDC} construit sur \mathbb{X} est isotope à M et vérifie $d_H(M, \hat{M}_{\text{TDC}}) \leq \varepsilon^2$. Malheureusement, cette méthode n'autorise pas \mathbb{X} à être bruité, et nécessite la connaissance des espaces tangents de M en chaque point de \mathbb{X} .

Indépendamment, les auteurs de [3] ont décrit les vitesses optimales d'estimation lorsque le nuage de points \mathbb{X} est tiré aléatoirement sur M , de manière indépendante et identiquement distribuée. Ici, M est supposée avoir les mêmes propriétés de régularité que dans [2]. Si l'on note n le nombre de points échantillonnés, la vitesse optimale d'approximation pour la distance d_H est de l'ordre de $(\log n/n)^{2/d}$. De plus, la méthode est robuste aux données aberrantes. Cependant, aucun algorithme n'est proposé pour le calcul effectif d'un estimateur \hat{M} qui atteindrait la vitesse optimale.

Contribution. Nous proposons dans un cadre aléatoire non-asymptotique un algorithme basé sur le complexe de Delaunay tangentiel \hat{M}_{TDC} qui atteint la vitesse optimale $(\log n/n)^{2/d}$. Cet algorithme est basé uniquement sur le nuage de point et ne nécessite pas la connaissance des espaces tangents. Ceux-ci sont estimés par ACP locale et utilisés par plug-in dans \hat{M}_{TDC} . Ce résultat montre que le complexe de Delaunay tangentiel peut être considéré comme optimal d'un point de vue de la reconstruction. Inversement, il montre que la vitesse d'approximation $(\log n/n)^{2/d}$ peut être obtenue avec des triangulations, et qu'elle est atteignable par un algorithme quadratique en n .

De plus, nous développons une méthode de débruitage lorsque des valeurs aberrantes sont présentes (Figure 3). Cette méthode se base sur un comptage de points contenus dans des pavés centrés en les points de \mathbb{X} , et dont les directions sont données par les espaces tangents estimés par ACP locale. Ce débruitage en une étape n'étant pas suffisant pour retrouver les vitesses optimales, une version itérative est aussi proposée.

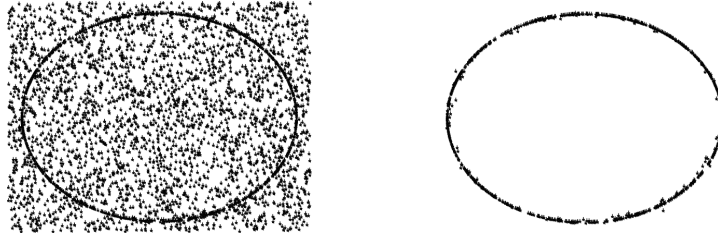


FIGURE 3 – Nuage de point bruité (g.) et débruité (d.)

Références

- [1] EDDIE AAMARI ET CLÉMENT LEVRARD, *Stability and Minimax Optimality of Tangential Delaunay Complexes for Manifold Reconstruction*, ArXiv e-prints.
- [2] JEAN-DANIEL BOISSONNAT ET ARIJIT GHOSH, *Manifold reconstruction using tangential Delaunay complexes*, *Discrete Comput. Geom.*, 51(1) :221–267, 2014..
- [3] CHRISTOPHER R. GENOVESE, MARCO PERONE-PACIFICO, ISABELLA VERDINELLI, ET LARRY WASSERMAN, *Manifold estimation and singular deconvolution under Hausdorff loss*, *Ann. Statist.*, 40(2) :941–963, 2012.
- [4] HERBERT FEDERER, *Curvature measures*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93 :418–491, 1959.

3 Diagrammes de Voronoi restreints

Le calcul de diagrammes de Voronoi restreints est récemment devenu un outil central pour de nombreuses applications, en particuliers en génération de maillages [4, 10], simulation de particules [1, 5] et en transport optimal [3, 2]. Avec ces applications sont nés des besoins, à la fois pour calculer efficacement de tels diagrammes et pour évaluer et optimiser des fonctions définies dessus. Dans cet exposé, nous nous attacherons particulièrement aux algorithmes de calcul de diagrammes de Voronoi restreints, et aux problèmes auxquels ils répondent.

Diagrammes de Voronoi restreints Calculer un diagramme de Voronoi ou la triangulation de Delaunay qui lui est duale est un problème classique de géométrie algorithmique. Étant donné un ensemble de sites $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^d$, la cellule de Voronoi d’un site \mathbf{v}_k dans le diagramme de \mathbf{V} est l’ensemble des points

$$\mathbf{Vor}_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}_k) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d, d(\mathbf{v}_k, \mathbf{p}) < d(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{p}) \text{ pour tout } \mathbf{v}_\ell \in \mathbf{V}, \mathbf{v}_\ell \neq \mathbf{v}_k\},$$

où $d(\mathbf{v}_k, \mathbf{p})$ est la distance entre le site \mathbf{v}_k et le point \mathbf{p} . Calculer le diagramme de Voronoi de \mathbf{V} dans \mathbb{R}^d consiste à calculer l’ensemble de ces cellules de Voronoi. Des algorithmes efficaces voire optimaux existent pour calculer ces diagrammes [6, 7].

Le diagramme de Voronoi restreint consiste simplement à ne définir le diagramme que dans une région d’intérêt $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mathbf{Vor}_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}_k) \cap \mathbf{S} = \{\mathbf{p} \in \mathbf{S}, d(\mathbf{v}_k, \mathbf{p}) < d(\mathbf{v}_\ell, \mathbf{p}) \text{ pour tout } \mathbf{v}_\ell \in \mathbf{V}, \mathbf{v}_\ell \neq \mathbf{v}_k\}.$$

De tels diagrammes apparaissent notamment dans le cadre de la reconstruction de surfaces à partir de nuages de points à la fois comme objet théorique pour prouver la correction de la reconstruction [8], et comme outil pratique qu’il est nécessaire de calculer pour obtenir la reconstruction [9].

Profiter la restriction L’algorithme naïf et souvent le plus efficace pour calculer un diagramme de Voronoi restreint revient à calculer le diagramme de Voronoi complet puis à en calculer l’intersection avec le domaine d’intérêt. Cet algorithme fonctionne souvent très bien car les algorithmes de calcul de diagrammes de Voronoi sont efficaces. Il est toutefois limité lorsque :

- peu de sites contribuent au diagramme restreint dans la zone d’intérêt ;
- la zone d’intérêt est de dimension plus faible que l’espace ambiant.

Dans ces deux cas, calculer le diagramme complet est une perte de temps car la complexité du diagramme complet est potentiellement bien plus élevée que celle du diagramme restreint. Pour profiter de la restriction et ne calculer le diagramme que dans les zones utiles, il est nécessaire de déterminer, étant donné l'espace de restriction, l'ensemble des sites concernés. Deux méthodes utilisant des requêtes de plus proche voisinage et fondées sur le même critère ont émergé à partir de ce constat [1, 10]. Nous montrerons dans cet exposé les avantages et limites de ces méthodes, ainsi que des pistes d'améliorations et des parallèles avec des algorithmes classiques de calcul de diagramme de Voronoi. Nous proposerons également quelques problèmes ouverts pour poursuivre ces recherches.

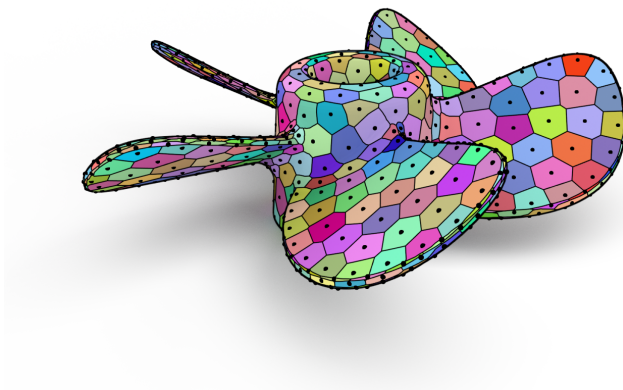


FIGURE 4 – Diagramme de Voronoi restreint à une surface

Références

- [1] RYCROFT, C., *Voro++ : a three dimensional voronoi cell library in c++*, Lawrence Berkeley National Laboratory, 2009.
- [2] LÉVY, B., *A numerical algorithm for L2 semi-discrete optimal transport in 3D*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 49(6), 1693-1715, 2015.
- [3] MÉRIGOT, Q., *A multiscale approach to optimal transport*, Computer Graphics Forum (Vol. 30, No. 5, pp. 1583-1592). Blackwell Publishing Ltd., 2011.
- [4] LÉVY, B. AND LIU, Y., *Lp Centroidal Voronoi Tessellation and its applications*, ACM Transactions on Graphics (TOG) (Vol. 29, No. 4, p. 119), 2010.
- [5] DE GOES, F., WALLEZ, C., HUANG, J., PAVLOV, D., AND DESBRUN, M., *Power particles : an incompressible fluid solver based on power diagrams*, ACM Trans. Graph., 34(4), 50., 2015.
- [6] CGAL, *Computational Geometry Algorithms Library*, 1995-2017.
- [7] BARBER, C. B., DOBKIN, D. P., AND HUHDANPAA, H., *The quickhull algorithm for convex hulls*, ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 22(4), 469-483, 1996.
- [8] EDELSBRUNNER, H., AND SHAH, N. R., *Triangulating topological spaces*, Proceedings of the tenth annual ACM Symposium on Computational geometry, 285-292, 1994.
- [9] DEY, T. K. AND GIESEN J., *Detecting undersampling in surface reconstruction*, Proceedings of the 17th ACM Symposium Computational Geometry, 257-263, 2001.
- [10] LÉVY, B. AND BONNEEL, N., *Variational anisotropic surface meshing with Voronoi parallel linear enumeration*, Proceedings of the 21st international meshing roundtable (pp. 349-366), Springer Berlin Heidelberg, 2013.