

Mini-symposium NumSNCF
Approximation numérique de systèmes hyperboliques
non-conservatifs en mécanique des fluides

Résumé

Ce mini-symposium est dédié aux systèmes hyperboliques non-conservatifs en mécanique des fluides. L'étude de tels problèmes est réputée délicate car la définition des solutions faibles reste mal comprise. Les enjeux sont d'ordre aussi bien théoriques que numériques. Il s'agit de donner par exemple un sens aux solutions physiquement réalistes, de déterminer des schémas numériques pertinents et précis. Le but de ce mini-symposium est alors de faire le point sur les avancées récentes dans ce domaine.

Organisateur(s)

1. **Stéphane Brull**, Bordeaux-INP.
2. **Denise Aregba**, Bordeaux-INP.

Liste des orateurs

1. **Christophe Chalons**, Université de Versailles-Saint Quentin
Titre : On the computation of non conservative products and cell averages in finite volume methods.
2. **Benjamin Boutin**, Institut de Recherche de Mathématique de Rennes
Titre : Produits non-conservatifs dans les modèles de transport sédimentaire.
3. **Denise Aregba**, Bordeaux-INP
Titre : Le système d'Euler bi-température non conservatif : propriétés entropiques et approximation numérique.
4. **Xavier Lhébrard**, Centre des Lasers Intenses et Applications
Titre : Modèle Euler bi-température non conservatif avec champ magnétique transverse.

Stéphane Brull, 351, cours de la Libération, 33405 TALENCE cedex FRANCE, Stephane.Brull@math.u-bordeaux1.fr

Denise Aregba, 351, cours de la Libération, 33405 TALENCE cedex FRANCE, denise.aregba@math.u-bordeaux.fr

Christophe Chalons, Adresse longue du premier orateur, christophe.chalons@uvsq.fr

Benjamin Boutin, IRMAR - Université de Rennes 1 Institut de Recherche Mathématiques de Rennes, benjamin.boutin@univ-rennes1.fr

Denise Aregba, 351, cours de la Libération, 33405 TALENCE cedex FRANCE, denise.aregba@math.u-bordeaux.fr

Xavier Lhébrard, Centre des Lasers Intenses et Applications, Université de Bordeaux, Domaine du haut carré, 43 rue Pierre Noailles, 33405 Talence Cedex, xavier.lhebrard@gmail.com

1 On the computation of non conservative products and cell averages in finite volume methods

We are interested in the numerical approximation of the discontinuous solutions of non conservative hyperbolic systems. We consider a non conservative formulation of the usual gas dynamics equations as a classical example of a non conservative system. We show how to define suitable projection steps in Godunov-type methods to properly compute the underlying shock discontinuities. Numerical evidences will be proposed.

2 Produits non-conservatifs dans les modèles de transport sédimentaire

On s'intéresse au modèle de Saint-Venant-Exner décrivant l'écoulement d'un fluide dans un canal avec prise en compte des mouvements sédimentaires. Je présenterai une étude débutée avec Christophe Berthon et Rodolphe Turpault [2] sur les difficultés inhérentes à la présence de produits non-conservatifs dans le modèle. Considérant différentes familles de chemins, au sens de la théorie développée par Dal Maso, LeFloch et Murat [3], nous calculons certaines courbes de Hugoniot exactes associées. Nous confrontons ensuite ces résultats à ceux obtenus par résolution numérique, considérant différents schémas de volumes finis inspirés de la littérature récente.

Travail soutenu par le GdR EGRIN (Ecoulements Gravitaires et RIques Naturels).

3 Le système d'Euler bi-température non conservatif : propriétés entropiques et approximation numérique

Le système d'Euler bitempérature décrit la dynamique d'un plasma hors équilibre thermique. On distingue alors la température des ions de celle des électrons, la densité et la vitesse étant celles du mélange. On a alors un système hyperbolique avec des produits non conservatifs, auxquels il faut donner un sens, et des termes sources. Dans cet exposé, nous montrerons les propriétés entropiques de ce système et nous proposerons des schémas numériques adaptés.

4 Modèle Euler bi-température non conservatif avec champ magnétique transverse

Le système d'Euler bitempérature décrit la dynamique d'un plasma constitué de deux espèces, les ions et les électrons, qui sont hors équilibre thermique. Des avancées sur ce système d'un point de vue modélisation et numérique ont été obtenues ([1]). En vue d'application à la fusion par confinement inertiel, il est nécessaire d'ajouter à ce modèle la rétroaction des champs magnétiques sur l'écoulement. Le travail a consisté à prendre en compte les champs magnétiques dans le modèle. Les équations aux dérivées partielles obtenues forment un système hyperbolique et non conservatif. L'étude de ces systèmes s'avère délicate car les solutions sont difficiles à définir. On se donne donc pour objectif de caractériser les solutions physiques de ce modèle nonconservatif et de développer un schéma numérique performant. Le premier résultat novateur de ce travail est l'élaboration d'un solveur de Riemann par relaxation. Le système de relaxation associé au solveur a la bonne propriété d'être linéairement dégénéré. Cela permet d'une part de se ramener à la résolution d'un système pour lequel les produits non conservatifs deviennent bien définis. D'autre part nous montrons les bonnes propriétés de précision et stabilité de notre méthode. Concernant la précision, la difficulté classique de ce type de méthode est d'introduire trop de diffusion numérique sur les discontinuités de contact. De ce point de vue, notre méthode est performante car elle résout exactement les discontinuités de contact. Concernant la stabilité, les difficultés sont de préserver les domaines physiques invariant, ici la positivité de la densité et des énergies internes. Plus encore, la robustesse sera assurée si le schéma vérifie une inégalité d'entropie discrète.

Le second résultat novateur de ce travail est donc de démontrer que le schéma satisfait une inégalité d'entropie discrète. La preuve repose sur l'existence d'une entropie étendue sur le système de relaxation et l'application d'un principe du minimum sur cette entropie.

Références

- [1] D. AREGBA, J BREIL, S. BRULL, B. DUBROCA, E. ESTIBLAS, *Modelling and numerical approximation for the nonconservative bitemperature Euler model*, à paraître dans M2AN.
- [2] C. BERTHON, B. BOUTIN, R. TURPAULT, *Shock profiles for the Shallow-water Exner model*, Adv. Appl. Math. Mech., Vol. 7, 3, (2015), 267-294.
- [3] G. DAL MASO, P. G. LE FLOCH, F. MURAT, *Definition and weak stability of nonconservative products*, J. Math. Pures Appl., Vol 9, 74, (1995), 483-548.