Mini-symposium EDPSnum
Méthodes numériques pour des équations aux dérivées partielles stochastiques

Résumé

Ce mini-symposium a pour but de présenter différents aspects de l'approximation numérique d'équations aux dérivées partielles stochastiques (EDP paraboliques semi-linéaires, lois de conservation scalaires hyperboliques, équations de Gross-Pitaevskii) pour donner un petit panorama introductif de thèmes de recherche actuels sur le sujet. Les questions abordées seront : la modélisation de condensats de Bose-Einstein, l'analyse numérique de schémas éléments finis, volumes finis, spectraux, l'approximation de distributions invariantes (comportement en temps long)... Des simulations numériques viendront illustrer ces différents points. Ce mini-symposium a pour vocation d'être facilement accessible à un public non spécialiste (grâce, entre autres, à un exposé introductif qui donnera rapidement les principaux outils de base liés aux EDPS et à leur approximation numérique).

Organisateur(s)

1. **Julia Charrier**, I2M, Université Aix-Marseille.

Liste des orateurs

1. **Julia Charrier**, I2M, Université Aix-Marseille
   Titre : Introduction : quelques outils et notions élémentaires pour les EPDS et leur approximation numérique.
2. **Charles-Edouard Bréhier**, ICJ, Université Lyon 1
   Titre : Simulation de la distribution invariante d'EDP Stochastiques.
3. **Romain Poncet**, CMAP, Ecole Polytechnique
   Titre : Modélisations stochastiques pour la dynamique de condensats de Bose-Einstein.
4. **Vincent Castel**, I2M, Université Aix-Marseille
   Titre : Lois de conservation hyperboliques scalaires stochastiques : existence et unicité de la solution entropique ainsi que convergence de schémas numériques.

Julia Charrier, I2M, Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille France, `julia.charrier@univ-amu.fr`
Romain Poncet, CMAP UMR 7641 école Polytechnique CNRS, Route de Saclay, 91128 Palaiseau Cedex France, `romain.poncet@cmap.polytechnique.fr`
Charles-Edouard Bréhier, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne, France, `brehier@math.univ-lyon1.fr`
Vincent Castel, I2M, Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M, UMR 7373, 13453 Marseille France, `Vincent.castel@univ-amu.fr`

1 Introduction : quelques outils et notions élémentaires pour les EPDS et leur approximation numérique

Cet exposé s'adresse à un public non spécialiste des équations différentielles stochastiques et équations aux dérivées partielles stochastiques ainsi que des méthodes numériques associées à ces équations. Le but de cet exposé est de présenter de manière formelle des outils classiques élémentaires qui permettront une meilleure compréhension des exposés qui suivent pour ceux qui ne sont pas familiers avec ces notions/techniques.
La première partie de l'exposé aura pour objectif de présenter les notions et résultats importants liés aux équations différentielles stochastiques et à leur approximation numérique. On commencera par présenter formellement les propriétés du mouvement brownien, les grands principes du calcul stochastique et la formule d'Itô dans le cas de processus à valeurs réelles. Puis on introduira les équations différentielles stochastiques et on donnera la définition d'une solution (forte). On présentera le critère de Kolmogorov qui permet d'obtenir des propriétés de régularité hölderienne sur les trajectoires.
On évoquera aussi le générateur de semi-groupe et les équations de Kolmogorov (progressive et rétrograde) associées. On présentera ensuite le schéma d'Euler explicite pour les EDS et on s'intéressera à l'estimation d'erreur : pour cela on commencera par définir deux notions d'erreurs, l'erreur forte et l'erreur faible. On verra que sous des hypothèses naturelles on obtient une erreur forte en $\sqrt{\Delta t}$ (en utilisant des estimations de type Gronwall) et une erreur faible en Δt (en utilisant l'équation de Kolmogorov rétrograde associée à l'EDS).
Dans une seconde partie, on s'intéressera à la généralisation des notions précédentes au cas de processus à valeurs dans un espace de dimension infinie, c'est à dire plus précisément aux équations aux dérivées partielles stochastiques. On commencera par voir comment on peut généraliser le mouvement brownien pour obtenir des bruits en espace et en temps grâce aux processus de Wiener cylindriques. Puis on évoquera la généralisation de l'intégrale stochastique en dimension infinie. On définira alors les EDPS dans un cadre formel général et la notion de solution fabile. Dans le cas d'un bruit additif, on présentera les notions de solution *mild* et de convolution stochastique qui sont importantes à la fois d'un point de vue théorique et pour l'approximation numérique.

2 Simulation de la distribution invariante d'EDP Stochastiques

Auteurs : Charles-Edouard Bréhier, Gilles Vilmart

On s'intéresse dans cet exposé à la simulation numérique de la distribution invariante μ d'EDP Stochastiques, paraboliques, semilinéaires, du type

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - V'\big(u(t,x)\big) + \xi(t,x), \quad t>0, x\in(0,1), \\ u(t,0)=u(t,1)=0, \quad t>0, \end{cases}$$

où ξ désigne le bruit-blanc espace-temps Gaussien. L'exemple $V(z)=\frac{z^4}{4}-\frac{z^2}{2}$ correspond à un modèle important, l'équation d'Allen-Cahn.
La distribution invariante μ (supposée unique) caractérise le comportement en temps long (en loi) de la solution $u(t,\cdot)$, partant d'une condition initiale quelconque. En effet, sous de bonnes hypothèses sur le potentiel V, $\mathbb{E}\varphi\big(u(t,\cdot)\big) \underset{t\to\infty}{\to} \int \varphi(v)\mu(dv)$, exponentiellement vite, pour des observables $\varphi : L^2(0,1)\to\mathbb{R}$ suffisamment régulières.
L'approximation numérique de μ passe en général par des simulations en temps long de $u(t,\cdot)$. Elle nécessite donc, d'une part, une discrétisation en temps (pas de temps Δt) et en espace (dimension N), et, d'autre part, l'utilisation d'une méthode de Monte-Carlo pour le calcul de l'espérance. Si $\mu^{\Delta t,N}$ est la distribution invariante du processus discrétisé, le biais de l'approximation est typiquement du type

$$\int \varphi d\mu - \int \varphi d\mu^{N,\Delta t} = \mathrm{O}\big(\Delta t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{N}\big).$$

Pour une erreur ϵ, la complexité est donc d'ordre $\epsilon^{-2}\Delta t^{-1}N=\epsilon^{-5}$.
Dans cet exposé, on présentera plusieurs stratégies (postprocessing, préconditionnement, méthodes Monte Carlo multi-niveaux) permettant de réduire ce coût. En particulier, on définira des schémas visant à améliorer l'ordre de convergence $\frac{1}{2}$.

On détaillera quelques problèmes théoriques concernant l'analyse de ces schémas. En parallèle, des simulations numériques montreront leurs bonnes propriétés qualitatives et quantitatives.

3 Modélisations stochastiques pour la dynamique de condensats de Bose-Einstein

Auteurs : Anne De Bouard, Romain Poncet

En reprenant les travaux de Satyendranath Bose, Albert Einstein prédit vers les années 1925 qu'un gaz parfait de bosons devait subir une transition de phase si sa densité devenait suffisamment grande, caractérisée par le fait qu'une part significative de ces bosons devrait s'accumuler dans un même état fondamental : c'est ce que l'on appelle aujourd'hui un *condensat de Bose-Einstein*. Autrement dit, la distribution statistique de Boltzmann est remplacée par une nouvelle distribution.

Nous présenterons dans cet exposé une modélisation stochastique pour la dynamique de tels systèmes. Celle-ci consiste en une généralisation de l'équation de Gross-Pitaevskii, qui vise à modéliser les effets d'une température non nulle ([1]). Cette modélisation prend la forme d'une équation aux dérivées partielles stochastiques qui peut cependant se ramener à une équation différentielle stochastique. Il s'agit plus précisément d'une dynamique de Langevin amortie non-réversible. Celle-ci contient plusieurs échelles temporelles. La plus petite correspond à la dynamique purement Hamiltonienne qui est donnée par la modélisation de Gross-Pitaevskii, et qui correspond au cas de la température nulle.

À une échelle de temps plus longue, des dynamiques métastables peuvent apparaître. C'est le cas lorsque l'énergie du système possède plusieurs minima locaux, ce qui peut notamment être le cas lorsque le condensat est mis en rotation. Un tel exemple est donné en Figure 1. Dans ce cas, et dans la limite

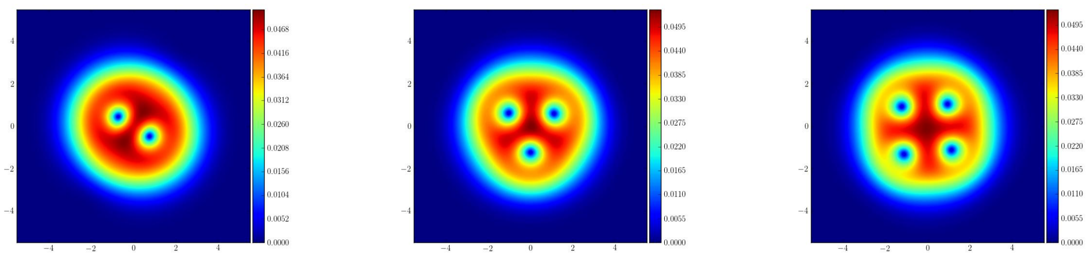

Figure 1 – Exemple d'équilibres métastables d'un condensat en rotation

basse température, le système reste longtemps proche d'un minimum local avant de changer de bassin d'attraction pour un autre minimum local.

Dans la but d'étudier cette dynamique complexe, nous présenterons dans un premier temps un schéma numérique inspiré de [2], qui repose sur une discrétisation spectrale. Nous présenterons ensuite quelques résultats numériques sur l'analyse de cette dynamique métastable, notamment à l'aide de l'algorithme AMS ([3]).

4 Lois de conservation hyperboliques scalaires stochastiques : existence et unicité de la solution entropique ainsi que convergence de schémas numériques

Auteurs : Caroline Bauzet, Vincent Castel, Julia Charrier, Thierry Gallouët

On s'intéresse dans cet exposé à l'approximation numérique de lois de conservation scalaires hyperboliques stochastiques du type

$$\begin{cases} du + \mathrm{div}\big[f(x,t,u)\big]dt &= g(u)dW(t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ u(\omega,x,0) &= u_0(x), \qquad\quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Pour cela on considèrera des schémas volumes finis monotones. L'objectif central de cet exposé est d'établir l'existence et l'unicité de la solution (stochastique entropique) et la convergence du schéma vers cette solution dans L^p_{loc} pour $p < 2$ sous une condition de CFL renforcée, généralisant les résultats de [4] au cas d'un flux très général.
On reprendra pour cela les grandes étapes de la preuve de convergence proposée dans [4]. On commencera par établir un résultat de stabilité L^2, puis on utilisera un résultat de compacité au sens des mesures de Young qui permettra d'établir la convergence du schéma (à une sous-suite près). On montrera ensuite que la limite obtenue est une solution mesure stochastique (c'est une notion de solution généralisée). Enfin pour conclure on établira qu'il existe une unique solution mesure stochastique qui est en fait une solution de l'EDPS.
L'apport le plus important par rapport aux travaux précédents est l'utilisation de la solution numérique pour établir le résultat d'unicité (dans les travaux précédents, l'unicité était obtenue à partir d'approximations visqueuses). On a donc une preuve originale du résultat d'unicité (et d'existence) qui ne nécessite pas l'introduction de solutions de problèmes approchés paraboliques et qui de plus a pour vocation naturelle d'être la première étape d'un travail ultérieur ayant pour objectif l'obtention d'estimations d'erreur fortes.

Références

[1] C W. Gardiner and M J. Davis, *The stochastic Gross-Pitaevskii equation : II*, Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics, 2003.

[2] C. Besse, G. Dujardin and I. Lacroix-Violet, *High order exponential integrators for nonlinear Schrödinger equations with application to rotating Bose-Einstein condensates*, to appear in SIAM J. Numer. Anal.

[3] C-E. Bréhier, M. Gazeau, L. Goudenège, T. Lelièvre and M. Rousset, *Unbiasedness of some generalized Adaptive Multilevel Splitting algorithms*, Annals of Applied Probability, 26(6), 3559-3601, 2016.

[4] C. Bauzet, J. Charrier, T. Gallouët, *Convergence of monotone finite volume schemes for hyperbolic scalar conservation laws with multiplicative noise.*, Stochastic Partial Differential Equations : Analysis and Computations, 2016.