Méthode de domaine fictif pour un problème de Stokes avec des conditions de type Robin

Thomas AUPHAN, IRSN

La simulation numérique d'écoulements turbulents en interaction avec une paroi est toujours un problème difficile.

Les méthodes de type domaines fictifs offrent la possibilité d'utiliser un maillage cartésien, non adapté à la forme du domaine contenant le fluide. Cela permet d'éviter l'utilisation de mailleurs sophistiqués et facilite l'implémentation des solveurs et la parallélisation des codes (via une méthode de décomposition de domaines). Enfin, en utilisant une méthode de domaine fictif avec un maillage cartésien, on profite des propriétés spécifiques aux grilles structurées (super-convergence, bon comportement en LES).

De nombreuses méthodes de domaine fictif ont été développées pour des conditions aux limites de type Dirichlet [?]. Cependant, très peu de résultats sont donnés pour des conditions aux limites de type Robin ou Neumann ([?], [?], pour des problèmes elliptiques). Or, la modélisation d'écoulements turbulents autour de parois génère des conditions de glissement (conditions de Robin, avec imperméabilité au niveau de la paroi). A notre connaissance, aucune méthode de type domaine fictif n'a été présentée dans ce cadre.

Dans un premier temps, on considère un problème de Stokes incompressible 2D où $\mathbf{u}$ représente la vitesse, p la pression, et $\tau(\mathbf{u}) = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^\top$ le tenseur des contraintes. La frontière du domaine contenant le fluide, $\partial\Omega$, est supposée avoir en presque tout point un vecteur normal unitaire sortant $\mathbf{n}$ et un vecteur tangent normal unitaire $\mathbf{t}$ (à choisir). Le problème s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\nabla\cdot\tau(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \displaystyle\int_\Omega p\, d\mathbf{x} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \text{ (imperméabilité)} \\ -\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{t})\cdot\mathbf{n} = \alpha\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{t} + g & \text{sur } \partial\Omega \qquad (\alpha > 0), \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathbf{f}$ et g sont respectivement des forces volumiques et surfaciques données. Le schéma numérique pour approcher la solution de (??) est de type MAC (*Marker And Cell*). Une méthode type domaine fictif de type *ghost cell* est proposée. L'idée est de prolonger le stencil du schéma numérique aux cellules proches de la frontière (dont l'un des voisins, au moins, est en dehors du domaine fluide Ω) via des reconstructions de la solution approchée, obtenues en exploitant les conditions aux limites. L'opérateur gradient de pression est discrétisé de manière à obtenir l'opérateur dual de la divergence de la vitesse. Les tests numériques à l'aide d'une solution manufacturée indiquent que la convergence au maillage est d'ordre 1.

Références

[1] R. Mittal, G. Iaccarino, *Immersed Boundary Methods*, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 37, pp. 239261, 2005

[2] I. Ramière, Ph. Angot, M. Belliard, *A general fictitious domain approach with immersed jumps and multilevel nested structured meshes*, Journal of Computational Physics, vol. 225 (2), pp. 1347-1387, 2007

[3] D. Kolomenskiy, R. Nguyen van yen, K. Schneider, *Analysis and discretization of the volume penalized Laplace operator with Neumann boundary conditions*, Applied Numerical Mathematics, in press, 2014

Thomas AUPHAN, Institut de Radioprotection et de Sreté Nucléaire (IRSN), Saint Paul-Lez-Durance, 13115, France
thomas.auphan@irsn.fr