Dynamique de concentration dans un modèle de chémostat

Cécile Taing, UPMC, Paris VI

Alexander Lorz, UPMC Paris VI

Benoît Perthame, UPMC Paris VI

Nous présentons des méthodes développées pour l'étude des phénomènes de concentration des solutions d'équations de type Lotka-Volterra non-locales. Ce formalisme a éte développé ([**?**, **?**]) dans l'objectif de décrire les phénomènes de sélection et de mutation en écologie. Un résultat typique concerne le modèle parabolique non-local suivant:

$$\epsilon \partial_t n_\epsilon(t,x) = n_\epsilon(t,x) R(x, \rho_\epsilon(t)) + \epsilon^2 \Delta n_\epsilon(t,x), \tag{1}$$

$$\rho_\epsilon(t) = \int_{\mathbb{R}^d} n_\epsilon(t,x) dx.$$

On cherche dans ce modèle à caractériser le comportement en temps long des solutions en tenant compte des mutations rares. On montre dans [**?**, **?**, **?**] sous différentes hypothèses que, pour $\epsilon \to 0$,

$$n_\epsilon(t,x) \to \overline{\rho}(t) \delta(x - \overline{x}(t)).$$

La preuve de ce résultat s'appuie sur l'équation de Hamilton-Jacobi avec contraintes

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = |\nabla u|^2 + R(x, \bar{S}(t)), \\ \max_{x \in \mathbb{R}^d} u(t,x) = 0, \qquad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Nous étendons la méthode à un système couplé inspiré du chémostat décrit dans [**?**], appareil expérimental typiquement utilisé en écologie et biologie évolutive:

$$\epsilon \partial_t n_\epsilon(t,x) = n_\epsilon(t,x) R(x, S_\epsilon(t)) + \epsilon^2 \Delta n_\epsilon(t,x), \tag{3}$$

$$\epsilon \beta \frac{d}{dt} S_\epsilon(t) = Q(S_\epsilon(t), \rho_\epsilon(t)), \tag{4}$$

Nous présenterons d'abord une théorie générale avec des hypothèses de régularité faible, puis deux cadres où nous pourrons décrire la concentration: en premier lieu en dimension 1 avec une hypothèse de monotonie et en second lieu sous des hypothèses de concavité des données initiales.

Références

[1] G. Barles, S. Mirrahimi and B. Perthame, *Concentration in Lotka-Volterra parabolic or integral equations: a general convergence result*, Methods Appl. Anal., 16(3):321–340, 2009.

[2] G. Barles and B. Perthame, *Dirac concentrations in Lotka-Volterra parabolic PDEs*, Indiana Univ. Math J., 57 (7):3275–3301, 2008.

[3] O. Diekmann, *A beginner's guide to adaptive dynamics*, Mathematical modelling of population dynamics, volume 63 of Banach Center Publ., Polish Acad. Sci., 2004.

[4] O. Diekmann, P.-E. Jabin, S. Mischler and B. Perthame, *The dynamics of adaptation: an illuminating example and a Hamilton-Jacobi approach*, Th. Pop. Biol., 67(4):257–271, 2005.

[5] A. Lorz and B. Perthame, *Long-term analysis of phenotypically structured models*, Proc. R. Soc. A, 470:20140089, 2014.

[6] A. Lorz, S. Mirrahimi and B. Perthame, *Dirac mass dynamics in multidimensional nonlocal parabolic equations*, Revue, Comm. Partial Differential Equations, 36(6):1071–1098, 2011.

Cécile Taing, Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC, 4 place Jussieu, 75005 Paris
`cecile.taing@gmail.com`
Alexander Lorz, Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC, 4 place Jussieu, 75005 Paris
`lorz@ann.jussieu.fr`
Benoît Perthame, Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC, 4 place Jussieu, 75005 Paris
`benoit.perthame@upmc.fr`