Une méthode simple et efficace de résolution d'EDPs par éléments finis P^1 avec des langages interprétés

François CUVELIER, Université Paris 13, LAGA

Gilles SCARELLA, CNRS UMR 7539, LAGA

Mots-clés : Eléments finis P^1, assemblage, vectorisation, langages interprétés

On présente une méthode simple et efficace de résolution des équations aux dérivées partielles par une méthode d'éléments finis P^1-Lagrange, dans des langages interprétés (ie Matlab, Octave, Python). La méthode est applicable à n'importe quelle dimension d'espace $d \geq 1$. Le problème modèle scalaire est le suivant:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f \quad \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ u &= g^D \quad \text{sur } \Gamma^D, \\ \frac{\partial u}{\partial n_{\mathcal{L}}} + a^R u &= g^R \quad \text{sur } \Gamma^R. \end{aligned}$$

L'opérateur $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel linéaire du second ordre qui s'exprime de la manière suivante (cf [3])

$$\mathcal{L}u \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{\mathbb{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},a_0} u = -\operatorname{div}(\mathbb{A}\nabla u) + \operatorname{div}(\boldsymbol{b}u) + \langle \nabla u, \boldsymbol{c} \rangle + a_0 u$$

où $\mathbb{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ et a_0 sont suffisamment régulières. Le système linéaire issu de la discrétisation par éléments finis P^1 est obtenu après vectorisation (notamment du calcul des matrices élémentaires). Sa résolution s'appuie sur des méthodes standards fournies par les langages.
Par extension, la méthode permet aussi de résoudre un système de m EDPs s'écrivant:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\boldsymbol{u} &= \boldsymbol{f} \qquad + \quad \text{CLs de Robin et Dirichlet} \\ \text{où } \mathcal{H}_{\alpha,\beta} &= \mathcal{L}_{\mathbb{A}^{\alpha,\beta},\boldsymbol{b}^{\alpha,\beta},\boldsymbol{c}^{\alpha,\beta},a_0^{\alpha,\beta}} \qquad \forall\, 1 \leq \alpha,\beta \leq m. \end{aligned}$$

Au final, les codes produits sont courts, lisibles, génériques et efficaces. Les performances sont comparées entre les différents langages et par rapport à FreeFem++, en tant que référence. Des exemples d'applications sont présentés : élasticité, convection-diffusion stationnaire, ...

Remerciements
Ce travail a été soutenu par l'ANR Dédales ANR14CE23-0005.

Références

[1] F. Cuvelier, C. Japhet, and G. Scarella, *An efficient way to perform the assembly of finite element matrices in vector languages*, Preprint, Université Paris 13, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00931066, 2014.

[2] F. Cuvelier and G. Scarella, *VecFEM packages*, Université Paris 13, http://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/software, 2015.

[3] A. Quarteroni and A. Valli, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer, 1994.

François CUVELIER, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539)
F-93430 Villetaneuse, France
`cuvelier@math.univ-paris13.fr`
Gilles SCARELLA, CNRS UMR 7539, LAGA, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité
F-93430 Villetaneuse, France
`scarella@math.univ-paris13.fr`