

# Estimateur d'erreur équilibré *a posteriori* pour des problèmes de courants de Foucault en régime harmonique

Roberta TITTARELLI, Université Lille 1

Emmanuel CREUSÉ, Université Lille 1

Serge NICAISE, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis

**Mots-clés :** Equations de Maxwell, estimateurs d'erreur *a posteriori*, méthode des éléments finis.

Ce travail est consacré au développement et à l'analyse d'un estimateur d'erreur *a posteriori* pour la résolution de problèmes de courants de Foucault en formulation harmonique. Ces problèmes sont modélisés par les équations de Maxwell en magnétodynamique considérées en régime basses fréquences, et données sur un domaine  $D$  par :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \text{ et } \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_f,$$

où  $\mathbf{E}$  est le champ électrique,  $\mathbf{B}$  l'induction magnétique,  $\mathbf{H}$  le champ magnétique,  $\mathbf{J}_s$  un terme source représentant une densité de courant à divergence nulle,  $\mathbf{J}_f$  le courant de Foucault et  $\omega$  la pulsation. Le système est complété par des conditions initiales et au bord *ad hoc*, ainsi que par les lois de comportement  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  dans  $D$  et  $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$  dans le domaine conducteur  $D_c \subset D$ . La solution numérique est calculée par la méthode des éléments finis qui peut être appliquée à la fois sur la formulation en potentiels  $\mathbf{A} - \varphi$  et sur la formulation en potentiels  $\mathbf{T} - \Omega$  (voir la section 2 de [?]). Si des estimateurs d'erreur résiduels sont disponibles pour chacune de ces deux formulations [?], ces derniers ne permettent pas de connaître explicitement la constante multiplicative  $C$  qui intervient dans l'inégalité de fiabilité caractérisée par erreur  $\leq C$  estimateur. Pour pallier ce problème, on développe dans ce travail des estimateurs dits "équilibrés". En considérant que  $\mathbf{B}_h$  et  $\mathbf{E}_h$  sont les champs discrets issus de la résolution numérique de la formulation  $\mathbf{A} - \varphi$  et que  $\mathbf{H}_h$  et  $\mathbf{J}_{f,h}$  sont les champs discrets issus de la résolution numérique de la formulation  $\mathbf{T} - \Omega$ , l'estimateur  $\eta$  est basé sur la non-vérification des lois de comportement au niveau discret. Pour chaque élément  $T$  du maillage  $\mathcal{T}_h$ , on définit ainsi:

$$\eta^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{magnetic,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h, T \subset D_c} \eta_{electric,T}^2, \text{ avec}$$

$$\eta_{magnetic,T}^2 = \|\mu^{1/2}(\mathbf{H}_h - \mu^{-1}\mathbf{B}_h + \mathbf{H}_{s,h} - \mathbf{H}_s)\|_T^2 \text{ et } \eta_{electric,T}^2 = \|(\omega\sigma)^{-1/2}(\mathbf{J}_{f,h} - \sigma\mathbf{E}_h)\|_T^2,$$

où  $\mathbf{H}_{s,h}$  représente la discrétisation du terme source  $\mathbf{H}_s$ , défini par la relation  $\operatorname{rot} \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s$ . Le Théorème 3.5 de [?] montre que :

$$\eta^2 = e^2 + \text{termes d'ordre supérieur, où} \quad (1)$$

$$e^2 = \|\mu^{1/2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_h)\|_D^2 + \|\mu^{-1/2}(\mathbf{B} - \mathbf{B}_h)\|_D^2 + \|(\omega\sigma)^{-1/2}(\mathbf{J}_f - \mathbf{J}_{f,h})\|_{D_c}^2 + \|\omega^{-1/2}\sigma^{1/2}(\mathbf{E} - \mathbf{E}_h)\|_{D_c}^2. \quad (2)$$

Pour mettre en place des techniques d'adaptation de maillage, on montre également que, pour chaque élément  $T \in \mathcal{T}_h$ , on a (Théorème 3.6 de [?]) :

$$(\eta_{magnetic,T}^2 + \eta_{electric,T}^2)^{1/2} \leq 2e_T + \text{termes d'ordre supérieur,} \quad (3)$$

où  $e_T$  désigne l'erreur (??) calculée uniquement sur l'élément  $T$  du maillage. Les résultats théoriques (??) et (??) sont illustrés par des benchmarks académiques et industriels.

## Références

- [1] E. CREUSÉ, S. NICAISE, R. TITTARELLI, *A guaranteed equilibrated error estimator for the  $\mathbf{A} - \varphi$  and  $\mathbf{T} - \Omega$  magnetodynamic harmonic formulations of the Maxwell system*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01110258>, 2015.
- [2] Z. TANG, Y. LE MENACH, E. CREUSE, S. NICAISE, F. PIRIOU, N. NEMITZ, *Residual Based a Posteriori Error Estimators for Harmonic  $\mathbf{A}/\varphi$  and  $\mathbf{T}/\Omega$  Formulations in Eddy Current Problems*, IEEE Transactions on Magnetics, 49(5):1721–1724, 2013.

Roberta TITTARELLI, LPP - UMR CNRS 8524 et L2EP, Université Lille 1, Cité Scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq, et EDF Division R&D, 1, avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex.  
roberta.tittarelli@ed.univ-lille1.fr