Schémas gradients appliqués au problème de Navier-Stokes stationnaire incompressible

Robert EYMARD, UPEM

Pierre FERON, UPEM

Cindy GUICHARD, UPMC Paris VI

La notion de schémas gradients pour des problèmes elliptiques et paraboliques, linéaires et non-linéaires (voir [?] par exemple), permet d'appliquer des résultats de convergence obtenus dans ce cadre à une grande variété de méthodes numériques. Pour vérifier que des méthodes numériques entrent dans le cadre des schémas gradients, il suffit de s'assurer qu'elles remplissent un minimum de propriétés. Le but est d'étendre ce cadre général de travail au problème de Navier-Stokes stationnaire incompressible avec des conditions de Dirichlet homogènes.

On définit pour cela une discrétisation de gradient $D = (X_{D,0}, Y_D, \Pi_D, \chi_D, \nabla_D, \mathrm{div}_D)$ telle que $X_{D,0}$ (resp. Y_D) est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ associé à la vitesse (resp. à la pression), l'application linéaire $\Pi_D : X_{D,0} \mapsto L^2(\Omega)^d$ est la reconstruction de l'approximation du champs de vitesse, l'application linéaire $\chi_D : Y_D \mapsto L^2(\Omega)$ est la reconstruction de l'approximation de la pression, l'application linéaire $\nabla_D : X_{D,0} \mapsto L^2(\Omega)^{d\times d}$ est l'opérateur de reconstruction du gradient de la vitesse et l'application linéaire $\mathrm{div}_D : X_{D,0} \mapsto L^2(\Omega)$ est l'opérateur de divergence discrete. On définit également la fonction non linéaire $b_D(u,v) = \frac{1}{2}\left(B_D(u,u,v) - B_D(u,v,u)\right)$, avec $B_D : X_{D,0}^3 \mapsto L^2(\Omega)^d$ tel que $B_D(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \Pi_D^{(i)} u \nabla_D^{(i,j)} v \Pi_D^{(j)} w \, dx$. Le schéma gradient s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{l} u \in X_{D,0}\,,\ p \in Y_{D,0}, \\ \eta \displaystyle\int_\Omega \Pi_D u \cdot \Pi_D v \, dx + \nu \int_\Omega \nabla_D u : \nabla_D v \, dx + b_D(u,v) \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_\Omega \chi_D p \, \mathrm{div}_D v \, dx = \int_\Omega \left(f\cdot \Pi_D v + G : \nabla_D v\right) \, dx,\ \forall v \in X_{D,0}, \\ \displaystyle\int_\Omega \chi_D q \, \mathrm{div}_D u \, dx = 0, \quad \forall q \in Y_{D,0}. \end{array}\right. \tag{1}$$

Il reste à définir les propriétés qui devront être vérifiées par les méthodes numériques pour leur permettre d'entrer dans le cadre des schémas gradients. Pour le problème de Navier-Stokes incompressible, quatre propriétés sont suffisantes. La coercivité assure simultanément le contrôle des normes $L^p(\Omega)$ $(p \le 4)$ de la reconstruction de la vitesse et de sa divergence discrete, ainsi que le contrôle de la pression sous la forme d'une condition discrete de Ladyzenskaja-Babuška-Brezzi. La consistance permet d'approcher les espaces des fonctions $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ avec les espaces discrets associés $X_{D,0}$ et Y_D. La conformité à la limite assure que les reconstructions du gradient discret et de la divergence discrète convergent respectivement vers le gradient et la divergence de la limite d'une suite d'approximations de la vitesse respectant une estimation sur le gradient discret. Enfin la compacité permet d'établir une propriété de convergence forte de la vitesse indispensable compte tenu de la présence du terme non-linéaire de convection.

Ainsi on peut établir le théorème de convergence suivant: si une suite de discrétisation $(D_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est coercive, consistante, compacte et conforme à la limite, alors $\Pi_{D_m} u_m \to \overline{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$, $\nabla_{D_m} u_m \to \nabla\overline{u}$ dans $L^2(\Omega)^{d\times d}$ et $\chi_{D_m} p_m \to \overline{p}$ dans $L^2(\Omega)$ et $(\overline{u}, \overline{p})$ est une solution faible du problème continu.

Références

[1] Eymard, R. and Herbin, R., *Gradient Scheme Approximations for Diffusion Problems*, Finite Volumes for Complex Applications VI Problems & Perspectives, 2011.

Robert EYMARD, LAMA (UMR 8050), Université Paris-Est Marne-la-Vallée, 5 boulevard Descartes, 77420 Champs-sur-Marne
`Robert.Eymard@u-pem.fr`
Pierre FERON, LAMA (UMR 8050), Université Paris-Est Marne-la-Vallée, 5 boulevard Descartes, 77420 Champs-sur-Marne
`Pierre.Feron@u-pem.fr`
Cindy GUICHARD, LJLL (UMR 7598), Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, 75005 Paris
`guichard@ljll.math.upmc.fr`