Propagation de fronts : Une classe de schémas volumes finis pour l'équation eikonale instationnaire

Nicolas THERME, Institut de Radioprotection et de Sureté Nucléaire (IRSN)

Les travaux présentés ici s'inscrivent dans la démarche de l'IRSN (Institut de Radioprotection et de Sureté Nucléaire) de construire des schémas numériques dans le but de simuler l'explosion d'hydrogène. Afin de modéliser le phénomène, on suppose que le processus de combustion a lieu dans une zone réactive mince se propageant au travers de l'écoulement. La position du front de flamme est alors définie comme une isovaleur de la solution d'une équation de type Hamilton-Jacobi particulière de la forme :

$$\partial_t(\rho G) + \mathrm{div}(\rho G \mathbf{u}) + \rho_u u_f |\nabla G| = 0$$

avec ρ masse volumique du fluide, $\mathbf{u}$ vitesse du fluide, u_f vitesse de flamme, ρ_u masse volumique des gaz imbrûlés et enfin G indicatrice de flamme. Afin d'isoler cette équation du système complexe dans lequel elle s'inscrit, on considère le problème canonique constitué d'une équation eikonale instationnaire simple et d'une condition initiale bornée uniformément continue :

$$\begin{aligned} &\partial_t G + u|\nabla G| = 0, \\ &G(0,x) = G_0(x) \in BUC(\Omega) \end{aligned} \tag{1}$$

Quelques schémas sur maillages non structurés ont été développés pour les équations d'Hamilton-Jacobi, dans [?] et [?]. La démarche proposée ici est différente. En effet, le principe de la discrétisation consiste à transformer l'équation eikonale en une équation de transport avec une vitesse colinéaire au gradient de G et de norme u. G est discrétisée au centre des mailles. On définit une approximation consistante du vecteur gradient $\mathbf{n}_G = \dfrac{\nabla G}{|\nabla G|}$ aux faces et on utilise une méthode volumes finis avec interpolation Upwind ou MUSCL de l'inconnue aux faces. Sous condition de C.F.L., le schéma admet un principe du maximum garantissant la stabilité de la solution. Dans le cas d'un maillage cartésien, il est possible de construire des approximations permettant d'approximer de façon consistante les composantes du gradient suivant chaque direction d'espace. Grâce à une construction alternative de $\mathbf{n}_G$ allant dans ce sens, on garantit la consistance du schéma ainsi que sa monotonie. En s'inspirant des travaux développés dans [?] et [?], la convergence de la solution discrète vers la solution du problème continu (**??**) est obtenue.
Les tests numériques effectués confirment les résultats théoriques et montrent une convergence numérique vers la solution continue pour des maillages non cartésiens.

Références

[1] G. Kossioris, Ch. Makridakis, P.E. Souganidis, *Finite volume schemes for Hamilton-Jacobi equations*, Numer. Math. 83, 1-19 , 1999.

[2] R. Abgrall, *Numerical discretization of the first-order Hamilton-Jacobi equation on triangular meshes*, Comm. Pure Appl. Math. 49, 1339-1373, 1996.

[3] M.G. Crandall, P.L. Lions, *Two approximations of Hamilton-Jacobi equations*, Math. Comp. 43, 1-19 , 1984.

[4] G. Barles, P.E. Souganidis, *Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations*, Asymptotic Analysis 4, 271-283, 1991.

Nicolas THERME, Institut de Radioprotection et de Sureté Nucléaire (IRSN), Cadarache
nicolas.therme@irsn.fr