

Existence locale et unicité de solutions fortes pour un modèle de Saint-Venant multi-vitesses

Ethem NAYIR, Université Pierre et Marie Curie

La modélisation de phénomènes hydrologiques à grande échelle suscite un attrait de plus en plus important dans le monde des mathématiques appliquées. Il s'agit de comprendre et de prédire l'évolution de phénomènes tels que les courants marins, les inondations ou les tsunamis. La compréhension et la prédiction de tels phénomènes intéressent la société civile. Du point de vue mathématique, il s'agit de construire des modèles à la fois riches et réalistes du point de vue physique et simulables en un temps raisonnable et de manière robuste.

Le cadre naturel pour les écoulements géophysiques est celui des équations de Navier-Stokes. Cependant ces équations présentent une trop grande complexité tant du point de vue théorique que numérique. Dans la pratique, selon le phénomène étudié, des modèles plus simples sont utilisés pour réduire le temps de calcul. Par exemple, en hydraulique fluviale, on utilise les équations de Saint-Venant qui se déduisent des équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse simplificatrice d'eau peu profonde. Cette hypothèse, souvent valable pour les lacs ou les rivières, n'est plus valable dans des cas d'eau profonde, d'effet de vent important ou de stratification.

Dans de tels cas, une alternative est l'utilisation des équations de Navier-Stokes hydrostatiques pour lesquelles des modèles multi-vitesses ont été introduits récemment dans [?] et [?]. Ils permettent à la fois d'enrichir les possibilités de modélisation tout en s'appuyant sur des concepts de modèles hyperboliques largement étudiés dans la littérature.

Dans cet exposé, nous nous attellerons à démontrer un théorème d'existence et d'unicité de solutions fortes en temps court sur \mathbb{R} pour le système d'équations du modèle présenté dans [?]. La preuve du caractère bien posé de ces équations permet de donner une assise mathématique solide à ces modèles multi-vitesses déjà implémentés numériquement. Nous utiliserons une technique de démonstration classique très utilisée en EDP : la méthode des itérées de Picard. Nous généraliserons notre système en un système parabolique-hyperbolique non-linéaire. Puis nous construirons une suite de solutions fortes de systèmes linéaires qui convergera vers une solution forte du système non-linéaire. Il faudra faire attention aux inégalités d'énergie qui nous donnent les espaces fonctionnels adéquats pour la recherche de solutions, et qui permettent d'assurer le caractère borné et la convergence de la suite d'itérées. Nous donnerons un résultat quantitatif mais non optimal sur le temps d'existence.

Références

- [1] E. AUDUSSE, M.-O. BRISTEAU, B. PERTHAME ET J. SAINTE-MARIE, *A multilayer Saint-Venant system with mass exchanges for shallow water flows. Derivation and numerical validation.*, M2AN, 2011.
- [2] ED. FERNÁNDEZ-NIETO, E.H. KONÉ ET T. CHACÓN REBOLLO, *A multilayer method for the hydrostatic navier-stokes equations : a particular weak solution*, J. Sci. Comput, 2013.

Ethem NAYIR, LJLL, UPMC, 4 Place Jussieu, 75005 Paris

nayir@ljl1.math.upmc.fr

Emmanuel Audusse, LAGA, Université Paris 13, Institut Galilée, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse

eaudusse@yahoo.fr

Yohan Penel, LJLL, UPMC, 4 Place Jussieu, 75005 Paris

penel@ann.jussieu.fr