Décomposition de Tucker pour la reconstruction de fonction en grande dimension

Thi Hieu LUU, Département SINETICS, EDF/R&D

Yvon MADAY, Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, F-75005, Paris, France

Matthieu GUILLO, Département SINETICS, EDF/R&D

Pierre GUÉRIN, Département SINETICS, EDF/R&D

Mots-clés : décomposition de Tucker, décomposition de Karhunen-Loève, Higher-order singular value decomposition, reconstruction de fonction

L'approximation de fonction est un problème rencontré dans de nombreux domaines : la théorie des équations aux dérivées partielles, la théorie des processus stochastique, l'analyse fonctionnelle, l'analyse numérique, etc. Dans notre travail, nous abordons le problème de la reconstruction de fonction en grande dimension. Il s'agit de reconstruire une fonction à partir d'un ensemble de ses valeurs prédéterminées. Avec des modèles courants comme l'interpolation multi-linéaire, les données nécessaires pour cette reconstruction augmentent exponentiellement en fonction de la dimension des variables. Nous devons affronter ici le problème du "fléau de la dimension". Ce problème est posé concrètement pour la reconstruction des sections efficaces dans le code COCAGNE d'EDF destiné à l'exploitation des centrales nucléaires. Les sections efficaces sont des données physiques multi-paramétrées ($dim \geq 5$) qui décrivent le combustible nucléaire. Nous devons chercher un nouveau modèle qui permet de diminuer le nombre de points précalculés par rapport au modèle multi-linéaire actuel en assurant la précision finale de l'approche. Pour ce problème, nous avons utilisé l'idée de la méthode "Higher-order singular value decomposition" [?], [?]. Notre méthode est basée sur la décomposition de Tucker [?] et utilise des fonctions de base issues de la décomposition de Karhunen - Loève [?].

La décomposition de Tucker est considérée comme une approche tensorielle de faible rang. Pour une fonction de plusieurs variables $f = f(x_1, x_2, ..., x_d)$, cette décomposition s'écrit comme suit :

$$f(x_1, x_2, ...x_d) \approx \tilde{f}(x_1, x_2, ...x_d) = \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=2}^{r_2} ... \sum_{i_d=1}^{r_d} \mathbf{a}[i_1, i_2, ..., i_d] \prod_{j=1}^{d} \varphi_{i_j}^{(j)}(x_j) \tag{1}$$

Où $\mathbf{a_i} = \mathbf{a}[i_1, i_2, ..., i_d]$ sont des coefficients et $\varphi_{i_j}^{(j)}(x_j)$ sont des fonctions monovariables à déterminer.

L'ensemble de fonctions $\{\varphi_{i_j}^{(j)}\}_{i_j=1,...,r_j}$ forment des fonctions de base pour chaque direction j, $j = 1, \ldots, d$. Ces fonctions sont déterminées par une extension de la décomposition de Karhunen - Loève en grande dimension. Cette décomposition nous permet de capturer des informations principales dans chaque direction en utilisant un faible nombre de fonctions monovariables. La décomposition de Tucker nous a permis de reconstruire les sections efficaces avec une réduction significative du stockage, du nombre de calculs nécessaires et avec une précision en générale meilleure que la méthode multi-linéaire actuelle.

Références

[1] De Lathauwer Lieven, De Moor Bart and Vandewalle Joos, *A multilinear singular value decomposition*, SIAM journal on Matrix Analysis and Applications, pages : 1253 - 1278, 2000.

[2] Hackbusch Wolfgang, *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, Springer, 2012.

[3] Ledyard R Tucker, *Some mathematical notes on three-mode factor analysis*, Psychometrika, volume 31(3), pages 279 - 311, 1966.

[4] Loève Michel, *Probability Theory: Foundations, Random Sequences*, Van Nostrand, 1955.

Thi Hieu LUU, Département SINETICS, EDF/R&D, 1 - Avenue du Général de Gaulle, 92140, Clamart, France
`thi-hieu.luu@edf.fr` ou `luu@ljll.math.upmc.fr`