# Une métrique sur l'espace des mesures: entre transport optimal et Fisher-Rao. Application au recalage d'images.

**Lénaïc CHIZAT**, CEREMADE, Université Paris-Dauphine

Le transport optimal, dans sa formulation dynamique [?], s'interprète comme la recherche de trajectoires de moindre énergie cinétique pour une mesure de probabilité, entre un état initial au temps $t = 0$ et un état cible au temps $t = 1$ donnés. Il s'avère que l'interpolation entre mesures ainsi définie approche bien les petites déformations de formes, ce qui la rend attractive pour le recalage ou la classification d'images. Toutefois, dans ce contexte, la contrainte d'égalité des masses entre la mesure initiale et la mesure cible n'est pas naturelle. Des travaux récents se basant sur la formulation dynamique du transport optimal proposent de pallier ce problème en introduisant un terme de source dans l'équation de continuité. Dans les modèles existants, la masse ainsi créée ou supprimée ne subit aucun transport [?, ?], à moins de déterminer *a priori* le terme de source comme fonction des autres variables [?]. Dans le modèle que nous introduisons, les variations de masse et le transport sont au contraire couplés.

Pour une densité $\rho_t$ sur un borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, l'équation de conservation de masse avec source s'écrit $\partial_t \rho_t + \nabla \cdot \mathbf{m}_t = \zeta_t$, où $\mathbf{m}_t$ est la quantité de mouvement et $\zeta_t$ la source. Parmi les solutions de cette équation, nous minimisons une fonctionnelle comprenant 2 termes: un terme d'énergie cinétique de type Benamou-Brenier [?] et un terme qui pénalise les variations de masse suivant la métrique de Fisher-Rao, c'est à dire la norme $L_2(d\rho_t)$ du taux de croissance $\zeta_t/\rho_t$. Ainsi, pour $\alpha > 0$, nous définissons $\mathcal{W}_\alpha^2(\rho_A, \rho_B)$ comme le minimum de la fonctionnelle convexe

$$\int_{t=0}^{t=1} \left( \int_\Omega \frac{|\mathbf{m}_t(x)|^2}{\rho_t(x)}\, dx + \alpha \int_\Omega \frac{\zeta_t(x)^2}{\rho_t(x)}\, dx \right) dt,$$

sous la contrainte de conservation de masse et les conditions aux bords $\rho_0 = \rho_A$ et $\rho_1 = \rho_B$.

Nos contributions sont organisées en 4 points. (1) Nous prouvons que le minimum de la fonctionnelle est atteint et que $\mathcal{W}_\alpha$ définit bien une métrique sur l'espace des mesures de Radon. (2) Nous démontrons aussi que les géodésiques de Wasserstein et de Fisher-Rao sont retrouvées en un certain sens quand le facteur de pondération $\alpha$ vaut respectivement $+\infty$ et 0. (3) L'utilisation d'outils d'analyse convexe nous permet ensuite d'expliciter le comportement des géodésiques, dans le cas de mesures de Diracs notamment. Essentiellement, on obtient que si dans toute boule de $\Omega$ d'un rayon donné (fonction croissante de $\alpha$), il existe un unique couple Dirac initial/Dirac cible, alors la géodésique consiste à translater les Diracs tout en ajustant leur masse. Cela est cohérent avec le comportement expérimental des géodésiques qui tendent à privilégier la source au transport quand le décalage spatial des mesures dépasse une certaine échelle, le paramètre $\alpha$ déterminant cette échelle. (4) Enfin, nous décrivons un schéma numérique de minimisation basé sur l'algorithme de Douglas-Rachford qui étend l'approche de Benamou-Brenier [?] et montrons les performances expérimentales de recalages, en particulier sur des images médicales.

Travail en collaboration avec Gabriel PEYRÉ, François-Xavier VIALARD et Bernhard SCHMITZER.

## Références

[1] BENAMOU, JEAN-DAVID AND BRENIER, YANN (2000) *A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Numerische Mathematik, 84 (3).

[2] MAAS, JAN AND RUMPF, MARTIN AND SCHÖNLIEB, CAROLA AND SIMON, STEFAN (2014) *A generalized model for optimal transport of images including dissipation and density modulation*, submitted, 24 p.

[3] PICCOLI, BENEDETTO AND ROSSI, FRANCESCO (2014) *Generalized Wasserstein distance and its application to transport equations with source*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 211(1).

[4] LOMBARDI, DAMIANO AND MAITRE, EMMANUEL (2013) *Eulerian models and algorithms for unbalanced optimal transport* , hal-00976501v3.

**Lénaïc CHIZAT**, Université Paris-Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny 75775 PARIS Cedex 16
chizat@ceremade.dauphine.fr