Une méthode alternative d'homogénéisation numérique

Claude LE BRIS, École des Ponts ParisTech (CERMICS)

Frédéric LEGOLL, École des Ponts ParisTech (LAMI)

Simon LEMAIRE, École des Ponts ParisTech (CERMICS)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, un domaine borné et régulier. Considérons le problème elliptique scalaire très simple suivant, que nous supposons bien posé :

$$-\mathrm{div}(A^\varepsilon \boldsymbol{\nabla} u^\varepsilon) = f \qquad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

fermé par un choix quelconque de conditions aux limites, où A^ε est une matrice symétrique oscillante et f une source. Ce modèle régit par exemple les variations de la pression u^ε, d'un fluide saturant un milieu poreux Ω, et de mobilité donnée par le coefficient A^ε (d'échelle caractéristique de variation ε).
D'un point de vue numérique, pour ε proche de 0, discrétiser le problème (**??**) plus finement que son échelle caractéristique n'est pas envisageable si la solution doit être calculée pour un grand nombre de jeux de données. Différentes approches existent donc pour calculer de manière efficace (et précise) la solution de (**??**), suivant l'échelle caractéristique ε considérée. Grossièrement, (i) pour ε très proche de 0, la théorie de l'homogénéisation [**?**] fournit un cadre, tandis que (ii) pour des régimes intermédiaires où ε est proche de 0 sans être ridiculement petite, on peut plutôt penser aux méthodes de type Éléments Finis Multi-échelles (MsFEM) [**?**]. Cependant, ces approches échouent dans un certain nombre de situations.

- En pratique, la connaissance du coefficient A^ε n'est bien souvent que partielle, voire carrément indisponible, et l'on n'a souvent accès qu'à la réponse u^ε du modèle pour quelques jeux de données. Dans ce cas, la théorie de l'homogénéisation ou les approches de type MsFEM sont inutilisables, car elles reposent sur la connaissance analytique des oscillations du modèle.

- Supposons maintenant que l'on examine la limite homogénéisée de (**??**), pour un coefficient A^ε qui n'est pas la remise à l'échelle $A(\cdot/\varepsilon)$ d'une fonction A simple (périodique, quasi-périodique...). Alors il pourrait tout à fait arriver, bien que A^ε soit connu, et bien que l'on sache que la limite homogénéisée de (**??**) vérifie
$$-\mathrm{div}(A^\star \boldsymbol{\nabla} u^\star) = f \qquad \text{dans } \Omega,$$
pour une certaine matrice symétrique homogénéisée $A^\star$ et des conditions aux limites identiques, qu'aucune expression explicite de $A^\star$ ne soit disponible. Des difficultés du même ordre apparaissent lorsque les expressions disponibles de $A^\star$ ne sont pas amenables en pratique à des calculs numériques efficaces (on pense en particulier au cas aléatoire stationnaire).

Il y a donc de la place pour l'amélioration, pour trouver des techniques alternatives d'homogénéisation numérique, qui permettent d'approcher efficacement (et précisément) la solution de (**??**), pour tous les régimes du petit paramètre ε, et dans toutes les situations, en particulier celles où les techniques standards échouent ou sont inefficaces.
Poussant plus avant les idées de [**?**], nous proposons dans ce travail d'exhiber un coefficient 'moyen', pour toute valeur d'échelle, défini comme l'argument d'un problème d'optimisation. Nous comparons notre approche aux méthodes standards, dans des cas où celles-ci s'appliquent.

Références

[1] Tartar, L., *The General Theory of Homogenization - A Personalized Introduction*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 7, Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[2] Efendiev, Y. and Hou, T. Y., *Multiscale Finite Element Methods - Theory and Applications*, Surv. and Tut. in the Applied Mathematical Sciences, vol. 4, Springer-Verlag, New York, 2009.

[3] Le Bris, C. and Legoll, F. and Li, K., *Coarse approximation of an elliptic problem with highly oscillatory coefficients*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 351(7-8):265–270, 2013.

Simon LEMAIRE, École des Ponts ParisTech (CERMICS), 6–8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2, France
`lemaires@cermics.enpc.fr`