

Modélisation et simulation du mouvement de structures fines dans un fluide visqueux.

Loïc LACOUTURE, Université Paris-Sud

Une grande part des muqueuses à l'intérieur du corps humain sont recouvertes de cils qui, par leurs mouvements coordonnés, conduisent à une circulation de la couche de fluide nappant la muqueuse. Dans le cas de la paroi interne des bronches, ce processus permet l'évacuation des impuretés inspirées à l'extérieur de l'appareil respiratoire.

Dans notre approche, nous nous intéressons aux effets du ou des cils sur le fluide, en nous plaçant à l'échelle du cil, et on considère pour cela les équations de Stokes incompressible. Due à la finesse du cil, une simulation directe demanderait un raffinement important du maillage au voisinage du cil, pour un maillage qui évoluerait à chaque pas de temps. Cette approche étant trop onéreuse en terme de coûts de calculs, nous avons considéré l'asymptotique d'un diamètre du cil tendant vers 0 et d'une vitesse qui tend vers l'infini : le cil est modélisé par un Dirac linéique de forces en terme source. Nous avons montré qu'il était possible de remplacer ce Dirac linéique par une somme de Dirac ponctuels distribués le long du cil. Ainsi, nous nous sommes ramenés, par linéarité, à étudier le problème de Stokes avec en terme source une force ponctuelle. Si les calculs sont ainsi simplifiés (et leurs coûts réduits), le problème final est lui plus singulier, ce qui motive une analyse numérique fine et l'élaboration d'une nouvelle méthode de résolution.

Nous avons d'abord étudié une version scalaire de ce problème : le problème de Poisson avec une masse de Dirac en second membre. La solution étant singulière, la méthode éléments finis est à définir avec précaution. Scott [4] a montré une convergence d'ordre 1 en norme L^2 contre 2 dans le cas régulier. Sur un sous-domaine qui exclut la singularité, Köppl et Wohlmuth [2] ont montré une convergence optimale en norme L^2 aussi et nous avons démontré une convergence quasi-optimale en norme H^s , $s \geq 1$. Des résultats similaires pour le problème de Stokes sont en cours.

La convergence étant dégradée, nous avons élaboré une méthode pour résoudre le problème de Stokes avec une force ponctuelle en terme source qui converge à l'ordre optimal sur l'ensemble du domaine [3]. Basée sur celle des éléments finis standard, elle s'appuie sur la connaissance explicite de la singularité de la solution exacte. L'idée est d'écrire la solution comme la somme d'un terme singulier (connu explicitement) et d'une fonction solution d'un problème annexe. Ainsi, on est ramené à la résolution numérique d'un problème dont on sait montrer qu'il est régulier, et dont la convergence de la solution approchée vers la solution exacte est optimale.

Connaissant la position de chacun des cils et leur paramétrisation (voir [1]), notre méthode permet de simuler en 3d et de manière directe un très grand nombre de cils. Nous l'avons donc appliquée au cas du transport mucociliaire dans les poumons. Pour la résolution du problème de Stokes régulier, nous avons utilisé le code de calcul implémenté par L. Gouarin et B. Fabrèges, qui a fait l'objet de la thèse de ce dernier. Nous avons apporté au code la méthode de construction du second membre du problème annexe et la correction à effectuer pour que la solution numérique devienne une bonne approximation de la solution exacte du problème initial.

Références

- [1] G. R. FULFORD, J. R. BLAKE, *Muco-ciliary Transport In The Lung*, Journal of Theoretical Biology, **121**, 381-402 (1986).
- [2] T. KÖPPL, B. WOHLMUTH, *Optimal A Priori Error Estimates For An Elliptic Problem With Dirac Right-Hand Side*, SIAM J. Numer. Anal., **52** (4), 1753-1769 (2014).
- [3] L. LACOUTURE, *A Numerical Method To Solve The Stokes Problem With A Punctual Force In Source Term*, Comptes Rendus Mécanique, **343** (3), 187-191 (2015).
- [4] R. SCOTT, *Finite Element Convergence For Singular Data*, Numer. Math., **21**, 317-327 (1973).