Convergence du schéma MAC pour les équations de Navier-Stokes incompressible instationnaire

Khadidja MALLEM, Aix-Marseille Université

Mots-clés : Equations de Navier-Stokes incompressible, Schéma MAC, Convergence

Le schéma Marker-And-Cell (MAC) a été développé par Harlow and Welch en 1965 [?] pour l'approximation des équations de Navier-Stokes. Bien que la méthode MAC ait été utilisée avec succès depuis 1965, l'analyse numérique et théorique de ce schéma n'a été effectuée qu'en 1992 par Nicolaides [?]. L'analyse de convergence en variables primitives sur un maillage cartésien non uniforme est proposée dans [?, ?] pour le problème de Stokes et dans [?] pour le problème de Navier-Stokes stationnaire. Nous proposons ici une analyse de convergence du schéma MAC pour les équations de Navier-Stokes en régime instationnaire avec une discrétisation en temps implicte.

Dans le schéma MAC, les inconnues discrètes sont les composantes normales de la vitesse aux faces du maillage, et la pression au centre des mailles dites "primales". L'équation de continuité admet une discrétisation naturelle sur ces dernières. Le bilan discret de chaque composante $k = 1, \ldots, d$ de la quantité de mouvement (où $d = 2$ ou 3 est la dimension de l'espace) est écrit sur les mailles duales attachées à la même composante k de la vitesse. Le terme de convection non linéaire est discrétisé de manière à être compatible avec une équation de continuité discrète sur les mailles duales, et coïncide avec la discrétisation habituelle sur maillage uniforme, contrairement à celle du schéma de [?].

Nous démontrons que le schéma préserve les propriétés de stabilité du problème continu (estimation $L^2(H^1)$ et $L^\infty(L^2)$ pour la vitesse), ce qui par un argument de degré topologique entraîne l'existence d'une solution au schéma. Puis, grâce à des techniques de compacité et en passant à la limite dans le schéma, nous démontrons que toute suite de solutions discrètes (obtenue par une suite de discrétisations dont les pas d'espace et de temps tendent vers zéro) converge, à l'extraction d'une sous-suite près, vers une solution faible du problème continu.

Références

[1] E. Chénier, R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin. An extension of the MAC scheme to locally refined meshes : convergence analysis for the full tensor time–dependent Navier–Stokes equations. to appear in Calcolo, 2014.

[2] Blanc, Philippe Convergence of a finite volume scheme on a MAC mesh for the Stokes problem with right-hand side in H^{-1} Finite volumes for complex applications IV,133–142,2005.

[3] Li, Jichun and Sun, Shuyu. The Superconvergence Phenomenon and Proof of the MAC Scheme for the Stokes Equations on Non-uniform Rectangular Meshes. Springer US,1-22,2014.

[4] Herbin, R. and Latché, J.-C. and Mallem, K. Convergence of the MAC Scheme for the Steady-State Incompressible Navier-Stokes Equations on Non-uniform Grids. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics,77:343-351,2014.

[5] F. Harlow and J. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Physics of Fluids*, 8:2182–2189, 1965.

[6] R. Nicolaïdes and X. Wu. Analysis and convergence of the mac scheme i, Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, 65:29–44, 1992.

Khadidja MALLEM, Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M UMR 7373, 39 rue Joliot Curie, 13453 Marseille
`khadidja.mallem@univ-amu.fr`
Raphaèle HERBIN, Aix-Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M UMR 7373, 39 rue Joliot Curie, 13453 Marseille
`raphaele.herbin@univ-amu.fr`
Jean-Claude LATCHÉ, IRSN, BP 3, 13115, Saint-Paul-lez-Durance cedex
`jean-claude.latche@irsn.fr`