Méthode de Newton pour l'optimisation de formes. Un exemple d'optimisation sans contrainte.

Jean-Léopold Vié, École des Ponts Paristech

Pour l'optimisation de formes, la structure du Hessien rend les méthodes d'ordre deux délicates à exploiter. Nous considérons ici un problème simple, et présentons une méthode d'intégration sur une frontière associée à une méthode de condensation de masse. Pour une fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on cherche Ω borné régulier solution de

$$\min_{\Omega} J(\Omega), \quad \text{avec} \quad J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x)\, dx \tag{1}$$

Les dérivées de forme de J font intervenir des intégrales sur le bord (κ est la courbure) :

$$J'(\Omega, \theta) = \int_{\partial\Omega} (\theta \cdot \mathbf{n}) f \, ds, \qquad J''(\Omega, \theta, \xi) = \int_{\partial\Omega} (\theta \cdot \mathbf{n})(\xi \cdot \mathbf{n})(\partial_{\mathbf{n}} f + \kappa f)\, ds$$

A partir d'une fonction ligne de niveaux ("level-set"), on peut calculer une fonction masse de Dirac concentrée sur la frontière pour évaluer une intégrale de bord comme une intégrale de surface, [**?**, Section 7]. Cependant ces expressions peuvent manquer de précision, et ne perçoivent pas l'annulation de la première dérivée à l'optimum. On introduit alors une méthode d'intégration qui repose sur des approximations linéaires. On en déduit une matrice de masse et une matrice de masse pondérée du bord, correspondant au calcul d'intégrales du type

$$\int_{\partial\Omega} VW\, ds, \quad \text{ou} \quad \int_{\partial\Omega} gVW\, ds$$

On utilise alors une procédé de condensation de masse ("mass-lumping", [**?**]) pour calculer une approximation diagonale de ces matrices, pour laquelle on peut évaluer l'erreur commise.

Revenant au problème d'optimisation (**??**), comme le Hessien n'est a priori pas défini positif, on utilise une méthode de région de confiance [**?**, Section 6.4] pour la recherche de direction de descente. Le caractère diagonal des matrices de masse facilite grandement cette recherche. On illustre avec un exemple les gains obtenus avec une méthode d'ordre deux.

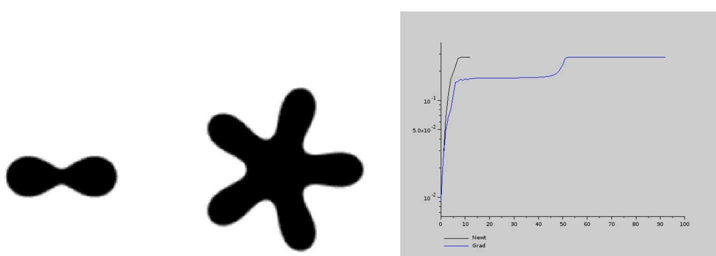

Figure 1: forme initiale - forme optimale - évolution de $|J|$ en échelle log.

Ces travaux sont effectués au sein du projet RODIN (FUI AAP 13).

Références

[1] G. Allaire, F. Jouve, A.M. Toader, *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method.*, Journal of Computational Physics, année.

[2] C.M. Chen, V. Thomée, *The lumped mass finite element method for a parabolic problem*, Journal of Australian Mathematical Society 1985.

[3] J. Nocedal, S.J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer 1999.

Jean-Léopold Vié, CERMICS, École des Ponts Paristech, Batiment Coriolis 6-8 avenue Blaise Pascal Cité Descartes - Champs sur Marne 77455 Marne la Valle Cedex 2
`viej@cermics.enpc.fr`