Convergence des techniques de lagrangien augmenté pour la résolution de problèmes de transport optimal

Romain HUG, Laboratoire Jean Kuntzmann, Université de Grenoble-Alpes et CNRS

Considérons deux densités (ρ_0, ρ_1) positives sur un espace convexe Ω, bornées et de même masse. Le problème de Monge-Kantorovich isotrope revient à déterminer un plan de transport optimal M entre ρ_0 et ρ_1, définissant ainsi la distance :

$$\mathcal{W}_2(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf_{M\#\rho_0=\rho_1} \int_\Omega |x - M(x)|^2 \rho_0(x) dx, \tag{1}$$

appelée *distance de Wasserstein*.

La résolution de ce problème, dans la formulation introduite par J.D. Benamou et Y. Brenier dans [?], se ramène à la recherche d'un déplacement continu de la masse qui minimise l'énergie cinétique exprimée en fonction dune densité et un champ de vitesse eulérien qui vérifient une loi de conservation. La distance de Wasserstein $\mathcal{W}$ précédemment définie correspond alors à

$$\mathcal{W}_2(\rho_0, \rho_1)^2 = \inf_{(\rho,v)\in C} \int_\Omega \int_0^1 \rho(t,x)|v(t,x)|^2 \, dx \, dt. \tag{2}$$

avec $C = \{((\rho, v),\ \rho \geq 0, \partial_t \rho + \mathrm{div}_x(\rho v) = 0,\ \rho(0, .) = \rho_0,\ \rho(1, \cdot) = \rho_1,\ (\rho v)_{|\partial\Omega} \cdot n_{\partial\Omega} = 0\}$.

Ainsi reformulé, il est possible alors de ramener ce problème à la recherche d'un point-selle d'un certain lagrangien, et ainsi de résoudre numériquement le nouveau problème par un algorithme de type Uzawa, basé sur la méthode des langrangiens augmentés telle que celle-ci fut introduite par M. Fortin et R. Glowinski dans [?]. Cet algorithme est aujourd'hui communément connu sous le nom d'algorithme de Benamou-Brenier.

A notre connaissance, la convergence théorique de l'algorithme a été uniquement étudiée dans [?]. Ce travail a montré l'existence théorique de solutions, ainsi que la convergence faible-L^2 de l'algorithme dans le cadre de densités ne s'annulant pas, pour des conditions de bord périodiques sur le domaine considéré.

Dans cet exposé, nous nous proposons de généraliser cette étude dans le cas de densités ayant la possibilité de s'annuler et pour des conditions de bords de type Neumann. De plus, nous proposerons une formulation de l'algorithme en termes d'opérateurs non-expansifs, ceci permettant d'obtenir une convergence forte-L^2 via une légère modification de l'algorithme de départ.

En outre, nous proposerons d'utiliser la formulation (??), afin de définir simplement un problème de transport optimal en milieu anisotrope (obstacles, polarisation, champs de force, etc...) en pénalisant cette énergie de déplacement : on cherche un transport continu de masse (ρ, v) qui minimise une énergie du type

$$\int_\Omega \int_0^1 \rho(t,x)\, v(t,x)^t A(t,x) v(t,x) \, dx \, dt \tag{3}$$

avec $A(t, x)$ symétrique définie positive. Nous proposerons des exemples de simulations numériques de ces interpolations généralisées.

Références

[1] J.D. Benamou et Y. Brenier, *A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Numer. Math. (2000) 84: 375393

[2] K. Guittet, *On the time-continuous mass transport problem and its approximation by augmented lagrangian techniques*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 41, No. 1 (2004), pp. 382-399

[3] M. Fortin et R. Glowinski, *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the numerical solution of boundary-value problems*, Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland (1983)

[4] R. Hug, E. Maitre et N. Papadakis, *Multi-physics Optimal Transportation and Image Interpolation* Special Issue of M2AN on "Optimal Transport in Applied Mathematics" (2015)

Romain HUG, Laboratoire Jean Kuntzmann, 51 rue des Mathématiques, BP 53, 38041 Grenoble Cedex 09
`romain.hug@imag.fr`