Algorithme primal-dual et décomposition de Helmholtz-Hodge pour le calcul du transport optimal

Morgane HENRY, Laboratoire Jean Kuntzmann, Université de Grenoble-Alpes

Emmanuel MAITRE, Laboratoire Jean Kuntzmann, Université de Grenoble-Alpes

Valérie PERRIER, Laboratoire Jean Kuntzmann, Université de Grenoble-Alpes

Le transport optimal trouve un nombre grandissant d'applications dans de nombreux domaines, et en particulier en traitement d'images [**?**]. En minimisant l'énergie de transport entre deux densités ρ_0 et ρ_1, il permet de définir une distance (distance de Wasserstein) entre ces densités. Le développement de nouveaux algorithmes efficaces pour son calcul est toujours d'actualité, spécialement pour des images de taille réelle, intervenant dans les applications. Dans ce travail nous nous sommes intéressés à la formulation de Benamou et Brenier [**?**], qui place le problème dans un contexte de mécanique des fluides en ajoutant une dimension temporelle. La minimisation de l'énergie cinétique, écrite en fonction de la densité ρ et de la masse m :

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{|m|^2}{\rho} dtdx, \text{ où } \Omega = (0,1)^n, \; n \in \{0,1\},$$

dans l'espace des contraintes

$$C := \{(\rho, m); \; \mathrm{div}_{t,x}(\rho, m) = 0, \; m(.,x).\nu_\Omega = 0, \; \forall x \in \partial\Omega, \; \rho(0,.) = \rho_0, \; \rho(T,.) = \rho_1\},$$

est alors effectuée en utilisant un Lagrangien augmenté. Les algorithmes existants exigent une projection sur la contrainte de divergence nulle à chaque itération de l'algorithme [**?**, **?**]. Cela correspond à la résolution d'une équation de Poisson en 3D à chaque itération pour une image 2D. Pour réduire le coût de calcul, nous proposons de travailler directement dans l'espace des contraintes pour minimiser la fonctionnelle, et nous affranchir de la résolution de l'équation de Poisson. La contrainte sera respectée par la décomposition de Helmholtz-Hodge [**?**] du vecteur

$$(\rho(t,x), m(t,x)) = \nabla_{t,x} \times \phi(t,x) + \nabla_{t,x} h(t,x).$$

Cela permet de reformuler la fonctionnelle de Benamou et Brenier en terme de fonction de courant. Pour des images 1D, l'équation d'Euler Lagrange est équivalente à une équation de type courbure minimale sur chaque ligne de niveau du potentiel. Nous montrons ensuite que l'algorithme primal-dual du premier ordre pour problèmes convexes de Chambolle et Pock [**?**] peut facilement être adapté pour trouver le minimum de la nouvelle fonctionnelle. Cet algorithme est aujourd'hui largement utilisé, permettant une implémentation simple, facilement parallélisable. Par conséquent, notre méthode mène à un algorithme rapide à implémenter pour des problèmes en imagerie, avec un gain significatif par rapport à l'état de l'art [**?**]. Des résultats sur des images de taille réelle seront présentés.

Références

[1] Benamou, J.-D. and Brenier, Y., *A computational fluid mechanics solution to the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Numerische Mathematik, 84, pp 375–393, 2000.

[2] Chambolle, A. and Pock, T., *A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 40, pp 120–145, 2011.

[3] Girault, V. and Raviart, P.-A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, Springer-Verlag, 1986.

[4] Papadakis, N. and Peyré, G. and Oudet, E., *Optimal transport with proximal splitting*, SIAM Journal on Imaging Sciences, 7, pp 212–238, 2014.

Morgane HENRY, Université Grenoble-Alpes et CNRS, Laboratoire Jean Kuntzmann, F-38 000 Grenoble
Morgane.Henry@imag.fr
Emmanuel MAITRE, Université Grenoble-Alpes et CNRS, Laboratoire Jean Kuntzmann, F-38 000 Grenoble
Emmanuel.Maitre@imag.fr
Valérie PERRIER, Université Grenoble-Alpes et CNRS, Laboratoire Jean Kuntzmann, F-38 000 Grenoble
Valerie.Perrier@imag.fr