Problème d'écoulement instationnaire, non isotherme et non-Newtonien soumis à la loi de Tresca

<u>**Hanene DEBBICHE**</u>, Institut Camille Jordan, Université Jean Monnet

Mahdi BOUKROUCHE, Institut Camille Jordan, Université Jean Monnet

Laetitia PAOLI, Institut Camille Jordan, Université Jean Monnet

Nons considérons un problème d'écoulement non isotherme d'un fluide non-Newtonien incompressible et instationnaire occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avec la condition de Tresca sur une partie du bord. L'originalité dans ce travail est que la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du tenseur des taux de déformations. Plus précisément, la frontière de Ω sera notée $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \omega$. On définit

$$V_{0.div} = \{\varphi \in (H^1(\Omega))^3; \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D, \quad \varphi \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \quad \text{et} \quad div(\varphi) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\}.$$

La formulation variationnelle du problème est donnée par

Problème (P1): Trouver $\overline{v} \in C([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; V_{0.div})$ avec $\overline{v}' \in L^2(0,T; V'_{0.div})$ vérifiant

$$\begin{aligned} &[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}_* \overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \quad \forall \overline{\varphi} \in L^2(0,T; V_{0.div}), \\ &\overline{v}(0) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \end{aligned}$$

où $\overline{v} = v - v_0\xi$, $[.,.]$ représente le crochet de dualité entre $L^2(0,T; V_{0.div})$ et $L^2(0,T; V'_{0.div})$,

$$J(\overline{\varphi}) = \int_0^T \int_\omega k|\overline{\varphi} - \tilde{s}|\, dx'\, dt,$$

et

$$[\mathcal{A}_* \overline{v}, \overline{\varphi}] = \int_0^T \int_\Omega 2\mu(\theta, \overline{v} + v_0\xi, |D(\overline{v} + v_0\xi)|) d_{ij}(\overline{v} + v_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi}) dx\, dt.$$

On étudie l'existence de la solution du problème (P1) en utilisant le théorème de point fixe de Schauder. En effet, pour tout $\mathbf{u} \in L^2(0,T; \mathbf{L}^2(\Omega))$, on considère le problème suivant

Problème (P2): Trouver $\overline{v} \in C([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; V_{0.div})$ avec $\overline{v}' \in L^2(0,T; V'_{0.div})$ vérifiant

$$\begin{aligned} &[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}} \overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \quad \overline{\varphi} \in L^2(0,T; V_{0.div}), \\ &\overline{v}(0) = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \end{aligned}$$

où

$$[\mathcal{A}_{\mathbf{u}} \overline{v}, \overline{\varphi}] = \int_0^T \int_\Omega 2\mu(\theta, \mathbf{u} + v_0\xi, |D(\overline{v} + v_0\xi)|) d_{ij}(\overline{v} + v_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi}) dx\, dt.$$

On montre l'existence et l'unicité de la solution du problème (P2) en utilisant la notion des semi-groupes et la méthode de monotonie [**??**]. Ensuite, on montre que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} : \quad L^2(0,T; \mathbf{L}^2(\Omega)) &\to L^2(0,T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \\ \mathbf{u} \qquad &\mapsto \overline{v}, \end{aligned}$$

admet au moins un point fixe en utilisant le théorème de point fixe de Schauder. On déduit que le problème (P1) admet au moins une solution $\overline{v} \in C([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; V_{0.div})$ avec $\overline{v}' \in L^2(0,T; V'_{0.div})$. Finalement, on achève l'étude en appliquant théorème de De Rham pour construire le terme de pression.

Références

[1] G. Duvaut, J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et physique*, Dunod, 1972.

[2] J.L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

Hanene DEBBICHE, Université Jean Monnet, 23 rue Paul Michelon, 42023, Saint- Etienne, FRANCE
`hanene.debbiche@univ-st-etienne.fr`
Mahdi BOUKROUCHE, Université Jean Monnet, 23 rue Paul Michelon, 42023, Saint- Etienne, FRANCE
`mahdi.boukrouche@univ-st-etienne.fr`
Laetitia PAOLI, Université Jean Monnet, 23 rue Paul Michelon, 42023, Saint- Etienne, FRANCE
`laetitia.paoli@univ-st-etienne.fr`