Conditions transparentes locales pour des problèmes d'évolution

Laurent DI MENZA, LMR, UFR SEN, Université de Reims

Lorsqu'on s'intéresse à un phénomène physique donné, on est amené à l'étude d'un problème d'évolution $(\mathcal{P})$ posé sur $\mathbb{R}^n$ dont le calcul de la solution u nécessite souvent l'utilisation de l'outil numérique. Pour des raisons évidentes de stockage, on convient plutôt de se placer sur un domaine Ω, appelé domaine de calcul sur lequel on cherche la solution $\tilde{u}$ du nouveau problème $(\widetilde{\mathcal{P}})$ considéré. Il est alors nécessaire de prescrire sur le bord de Ω des conditions aux limites bien adaptées ne faussant pas le comportement de la solution de $(\widetilde{\mathcal{P}})$ par rapport à celle de $(\mathcal{P})$. Dans le cas idéal où $\tilde{u} = u|_\Omega$, on parle de conditions *transparentes*. Hélas, ces conditions sont délicates à utiliser dans la pratique car elles font généralement intervenir un opérateur non local en temps et en espace transverse. Dès lors, des approximations de cette condition ont donné lieu à la mise en œuvre de conditions approchées (dites *absorbantes*) pour un grand nombre de modèles physiques, tels que la propagation d'ondes, les problèmes de diffusion et les équations dispersives (voir autre autres [?], [?], [?]).

Dans cet exposé, on donne une nouvelle approche de l'utilisation de conditions aux limites transparentes pour des EDP d'ordre 2 en espace, parmi lesquelles l'équation de Schrödinger et l'équation des ondes linéaire, sur un demi-espace. L'idée est de rendre celles-ci locales sans approximation en considérant une inconnue auxiliaire calculée sur tout le domaine Ω et liée à la solution par un couplage linéaire et local sur le bord. Par exemple pour l'équation de Schrödinger en dimension 1 d'espace posée sur $\mathbb{R}$

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0, \quad u(0,x) = \varphi(x),$$

où la donnée φ est à support compact dans $\Omega =]-\infty, 0[$, la condition transparente s'écrit en $x = 0$

$$\partial_x u(t,0) + e^{-i\pi/4}\sqrt{\partial_t}u(t,0) = 0, \quad \text{avec} \quad \sqrt{\partial_t}f(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}}\,ds.$$

De même, la solution $\breve{u}$ du problème avec donnée initiale $\breve{u}(0,x) = u_0(-x)$ vérifierait en $x = 0$ la condition symétrique $\partial_x\breve{u}(t,0) - e^{-i\pi/4}\sqrt{\partial_t}\breve{u}(t,0) = 0$. Définissant alors sur Ω la fonction $v := e^{-i\pi/4}\sqrt{\partial_t}\breve{u}$ (initialisée à 0), on peut voir que v satisfait la même équation de Schrödinger et la condition aux limites $\partial_x v(t,0) - e^{-i\pi/4}\sqrt{\partial_t}v = \partial_x v(t,0) + i\sqrt{\partial_t}\sqrt{\partial_t}u = 0$ car $\breve{u}(t,0) = u(t,0)$. Puisque $\sqrt{\partial_t}\sqrt{\partial_t}u = \partial_t u$ en $x = 0$, on obtient donc le système

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0 & i\partial_t v + \partial_x^2 v = 0 & x \in]-\infty, 0[& t > 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) & v(0,x) = 0 & x \in]-\infty, 0[& \\ \partial_x u + v = 0 & \partial_x v + i\partial_t u = 0 & x = 0 & t > 0 \end{cases}$$

présentant des conditions aux limites localement couplées facilement utilisables dans la pratique. La même stratégie peut être utilisée en dimension supérieure sur un demi-espace.
On présentera des résultats numériques en dimensions 1 et 2 d'espace tirés de [?] et [?] montrant l'efficacité de cette nouvelle formulation.

Références

[1] Antoine X., Arnold A., Besse C., Ehrhardt M., Schädle A., *A Review of Transparent and Artificial Boundary Conditions Techniques for Linear and Nonlinear Schrödinger Equations*, Communications in Computational Physics vol. 4, n. 4 (2008), pp. 729-796.

[2] Di Menza L., *Local transparent conditions for the linear Schrödinger equation*, Preprint (2015).

[3] Di Menza L., *Revisited transparent conditions for the wave equation*, Preprint (2015).

[4] Engquist B., Majda A., *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*, Math. Comp., vol. 31, n. 139 (1977), pp. 629-651.

[5] Halpern L., Rauch J., *Artificial boundary conditions for general parabolic equations*, Numer. Math., vol. 71 (1995), pp. 185-224.

Laurent DI MENZA, Laboratoire de Mathématiques de Reims, ARC-Mathématiques CNRS-FR 3399, UFR SEN, Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims Cedex 02
laurent.di-menza@univ-reims.fr