Étude de la stabilité d'un schéma volumes finis pour un modèle de dérive-diffusion dans la limite de masse d'électrons.

Pierre-Louis COLIN, Université Lille 1

Dans cette communication, nous étudions la stabilité d'un schéma volumes finis pour un modèle dérive-diffusion dans la limite de masse d'électrons.
Le modèle considéré est le système d'équations aux dérivées partielles $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ suivant :

$$\begin{cases} -\lambda^2 \Delta \Psi = P - N, \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \partial_t P - \operatorname{div} J_P = 0, \quad J_P = \nabla P + P \nabla \Psi, \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \varepsilon \partial_t N - \operatorname{div} J_N = 0, \quad J_N = \nabla N - N \nabla \Psi, \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^q$, $q = 2, 3$. Ce modèle peut être replacé dans le cadre plus général des plasmas non magnétisés. Les inconnues sont alors les densités d'électrons N, de cations P et le potentiel électrique Ψ. Le paramètre ε est le ratio des masses d'un électron et d'un cation, $\varepsilon \ll 1$. De plus, le système $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est complété par des conditions initiales et des conditions au bord de type mixtes (Dirichlet-Neumann).
A. Jüngel et Y.-J. Peng ont montré dans [?] la convergence, lorsque ε tend vers 0, d'une solution du modèle $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ vers une solution du modèle $(\mathcal{P}_0)$ suivant :

$$\begin{cases} -\lambda^2 \Delta \Psi = P - \mathrm{e}^{\Psi}, \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ \partial_t P - \operatorname{div} J_P = 0, \quad J_P = \nabla P + P \nabla \Psi, \quad \text{dans } \Omega \times (0,T). \end{cases}$$

Pour montrer cette convergence, ils utilisent une estimation d'énergie associée à un contrôle de la dissipation d'énergie. Cette estimation permet en effet de démontrer la convergence de la suite $(N_\varepsilon, P_\varepsilon, \Psi_\varepsilon)_\varepsilon$ vers (N, P, Ψ) avec $N = \mathrm{e}^{\Psi}$, si les conditions au bord sont à l'équilibre thermique.
L'objet de notre travail est l'étude de schémas numériques $(\mathcal{S}_\varepsilon)$ et $(\mathcal{S}_0)$ respectivement associés aux modèles $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ et $(\mathcal{P}_0)$. Les schémas considérés sont de type Euler implicite en temps et volumes finis en espace. De plus, les flux de convection-diffusion sont approchés par les flux numériques de Scharfetter-Gummel.
Nous montrons que la solution du schéma $(\mathcal{S}_\varepsilon)$ converge vers une solution du schéma $(\mathcal{S}_0)$, à l'aide d'une version discrète de l'estimation d'énergie utilisée dans [?] et obtenue par M. Chatard dans [?]. Le résultat obtenu est similaire à celui du modèle continu. Nous montrons également la convergence du schéma $(\mathcal{S}_0)$.
Cette étude de stabilité nous permet de justifier l'utilisation du schéma numérique de [?] pour un modèle de corrosion proche de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ et tel que $\varepsilon \ll 1$.

Références

[1] A. Jüngel and Y.-J. Peng, *A hierarchy of hydrodynamic models for plasmas*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 2000.

[2] M. Chatard, *Asymptotic behavior of the Scharfetter-Gummel scheme for the drift-diffusion model*, in Finite Volumes for Complex Applications-Problems and Perspectives: Fvca 6, International Symposium, Prague, June 6-10, vol. 4. Springer, 2011.

[3] C. Chainais-Hillairet, P.L. Colin and I. Lacroix-Violet, *Convergence of a finite volume scheme for a corrosion model*, hal-01082041, 2014.

Pierre-Louis COLIN, Université Lille 1, Laboratoire Paul Painlevé UMR CNRS 8524 - Cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France
pierre-louis.colin@ed.univ-lille1.fr