Approximation de surfaces par des varifolds discrets

Blanche BUET, Université Lyon 1

Gian Paolo LEONARDI, University of Modena

Simon MASNOU, Université Lyon 1

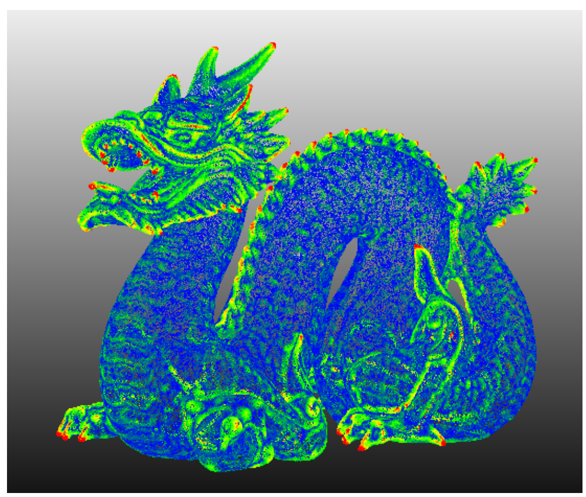
Il existe de très nombreuses façons de représenter et discrétiser une surface (par exemple à l'aide de splines, de maillages polyédraux, d'ensembles de niveaux, de nuages de points, d'ondelettes, etc.). En général, une surface et sa discrétisation ou encore différentes discrétisations d'une même surface ne vivent pas dans le même espace, et sont donc difficilement comparables. À chaque type de discrétisation correspond un cadre d'étude : pour mesurer la qualité de la discrétisation, définir des estimateurs de plan tangent et étudier leur convergence, donner une notion de courbure discrète... Dans ces travaux, on étudie l'approximation des surfaces sous l'angle de la théorie des *varifolds*, qui sont une notion de surface généralisée en théorie de la mesure. Cela permet de donner un cadre unifié à l'étude des objets continus (courbes, surfaces ...) et de leurs différentes discrétisations. Dans ce cadre, il est notamment possible

- de donner un sens commun à la convergence de discrétisations vers un objet continu lorsque le paramètre de discrétisation tend vers 0 et de mesurer de façon quantitative l'erreur d'approximation;
- d'établir des conditions de régularité (en termes de rectifiabilité, variation première bornée) d'un objet obtenu comme limite d'objets discrets;
- de définir une notion de courbure moyenne discrète permettant d'estimer numériquement la courbure moyenne pour différents types de discrétisations.

Cette notion de courbure discrète est définie en régularisant par convolution avec un noyau radial ρ_ϵ la *variation première δV d'un varifold V*. δV est une distribution d'ordre 1 fournissant une notion faible de courbure moyenne consistante avec la notion classique de courbure moyenne pour les surfaces régulières.

Si $V = \sum_{j=1}^{N} m_j \delta_{(x_j, P_j)}$ est le varifold associé à un nuage de points $(x_j) \subset \mathbb{R}^n$ muni des directions (d–plans) (P_j) et pondéré par les masses $(m_j) \subset \mathbb{R}_+^*$, on définit la courbure moyenne discrète à l'échelle ϵ au point x par

$$H_\epsilon^V(x) = -\frac{\delta V * \rho_\epsilon(x)}{\|V\| * \rho_\epsilon(x)} = -\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j \zeta'\left(\frac{|x_j - x|}{\epsilon}\right) \frac{\Pi_{P_j}(x_j - x)}{|x_j - x|}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{N} m_j \epsilon \zeta\left(\frac{|x_j - x|}{\epsilon}\right)}$$



où $\|V\|$ désigne la masse de V et $\zeta(x) = \rho_\epsilon(|x|)$.
La convergence de cette courbure discrète est établie sous des conditions liant d'une part la vitesse de convergence des varifolds V_i (associés aux discrétisations) vers le varifold V (associé l'objet continu) au sens d'une distance de type Bounded Lipschitz, et d'autre part le paramètre de convolution ϵ_i. On représente sur la figure ci-dessus l'intensité de la courbure calculée grâce à cette approche sur un nuage de 435000 points.

Blanche BUET, Bâtiment Braconnier, 43 bd. du 11 novembre 1918, 69 622 Villeurbanne Cedex
buet@math.univ-lyon1.fr
Gian Paolo LEONARDI, Department of Mathematics, Via Campi, 213/b - 41100 Modena, Italy
gianpaolo@unimore.it
Simon MASNOU, Bâtiment Braconnier, 43 bd. du 11 novembre 1918, 69 622 Villeurbanne Cedex
masnou@math.univ-lyon1.fr