Prise en compte numérique de conditions d'interface dans les systèmes hyperboliques

Nina AGUILLON, Université Aix Marseille

Raul BORSCHE, Technische Universität Kaiserslautern

Mots-clés : systèmes hyperboliques, conditions d'interface, schémas de volumes finis

On s'intéresse à l'approximation numérique des solutions de systèmes hyperboliques posés sur des réseaux, où des conditions d'interfaces sont imposées à chaque point de raccordement. On se concentre sur un seul embranchement, c'est-à-dire sur le cas de N demi-droites ayant une origine commune. En orientant ces demi-droites à partir de cette origine, on s'intéresse à

$$\begin{cases} \partial_t U_i + \partial_x f(U_i) = 0 & \forall i \in \{1, \cdots, N\}, \forall x > 0 \\ \Phi(U_1(t, 0^+), \cdots, U_N(t, 0^+), t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

La fonction Φ regroupe les conditions d'interfaces. Beaucoup d'applications rentrent dans ce cadre (voir [2]): écoulement d'eaux usées, réseaux de gazoducs ou encore certains modèles de trafic routier.
Numériquement, l'enjeu est de prendre en compte les conditions d'interface dans le schéma choisi. Pour ce faire, nous avons choisi d'utiliser une stratégie numérique qui copie la stratégie de résolution du problème de Riemann pour (1) (cas où les données initiales sont constantes sur chaque branche du réseau: $U_i(t = 0) = U_i^0$). Dans ce cas on peut chercher une solution autosemblable (qui ne dépend que de x/t), et trouver la solution revient à déterminer les traces autour de la particule, c'est-à-dire les états $U_i(x = 0^+)$ sur chaque branche. Ces états doivent vérifier les deux points suivants:

- Ils vérifient les conditions d'interfaces:
$$\Phi(U_1(0^+), \cdots, U_N(0^+)) = 0 \tag{2}$$
- $U_i(0^+)$ est effectivement une trace possible en $x = 0$ d'une solution du système hyperbolique sur la demi droite $x > 0$, avec pour donnée initiale la constante U_i^0. En notant g le flux de Godunov, cela se traduit par
$$g(U_i(0^+), U_i^0) = f(U_i(0^+)). \tag{3}$$

Montrer que le problème de Riemann est bien posé revient exactement à montrer qu'il existe une unique manière de choisir $U_1(0^+), \cdots, U_N(0^+)$ vérifiant (2) et (3) à partir de la connaissance $U_1^0, \cdots, U_N^0$.
Malheureusement si g est un autre flux numérique que celui de Godunov (dont le calcul est difficile en général puisqu'il revient à calculer la solution exacte) le système $(2-3)$ est surcontraint et n'a en général pas de solution. Nous proposons dans le cas $N = 2$ de remplacer (3) par la condition plus souple

$$g(U_1(0^+), U_1^0) - f(U_1(0^+)) = g(U_2(0^+), U_2^0) - f(U_2(0^+)) \tag{4}$$

ce qui revient à *autoriser des ondes à rentrer dans l'interface, tout en compensant leurs effets.* C'est une alternative à la miniminisation proposée dans [3]. Nous explorons en détails ce choix dans le cas où les conditions d'interface correspondent au cas classique ou au couplage fluide / particule étudié dans [1]. Dans le cas scalaire, cette méthode correspond à celle des "transmission maps" récemment introduite dans [4] et fonctionne très bien. L'extension au cas des systèmes n'est pas immédiate mais permet d'obtenir des simulations numériques sur des cas où la résolution explicite du problème de Riemann n'est pas envisageable.

Références

[1] Aguillon Nina, *Riemann problem for a particle–fluid coupling*, M3AS, 2015.

[2] Garavello Mauro, *A review of conservation laws on networks*, Netw. Heterog. Media, 2010.

[3] Borsche Raul, *Numerical schemes for networks of hyperbolic conservation laws*, Preprint, 2014.

[4] Andreianov Boris et Cancès Clément, *On interface transmission conditions for conservation laws with discontinuous flux of general shape*, J. Hyp. Diff. Eq., 2015.

Nina AGUILLON, Institut de Mathématique de Marseille, Université Aix Marseille, 13453 Marseille
nina.aguillon@univ-amu.fr