Mini-symposium COAP
Contrôle et applications

Avec le soutien de l'équipe INRIA McTAO et du réseau européen SADCO (Sensitivity Analysis for Deterministic Controller Design, Initial Training Network, FP7 grant no. 264735-SADCO)

Résumé

Ce minisymposium propose trois applications industrielles de l'optimisation et du contrôle optimal en aéronautique et mécanique spatiale, ainsi que deux exposés plus orientés contrôle (on ne considère pas de critère à minimiser) : l'un à trait à l'équivalence des systèmes (en lien avec la planification de trajectoires), l'autre au contrôle en boucle fermée de type *sliding-mode*.

Organisateur(s)

1. **Jean-Baptiste Caillau**, Univ. Bourgogne & CNRS/INRIA.

Liste des orateurs

1. **Maxime Chupin**, Univ. Paris VI
   Titre : Transfert interplanétaire à consommation faible par utilisation des propriétés du problème des trois corps.
2. **Thierry Dargent**, Thales Alenia Space
   Titre : Modèle de potentiel complet et perturbations pour le contrôle optimal d'un engin spatial.
3. **Albert Granados**, INRIA Rocquencourt
   Titre : Period adding in first order systems controlled by relays.
4. **Florentina Nicolau**, INSA Rouen
   Titre : Linéarisabilité de systèmes multi-entrées.
5. **Achille Sassi**, ENSTA-Paristech / EADS Astrium
   Titre : Probabilistic constraints in trajectory and fuel optimization of a three-stage launcher.

Jean-Baptiste Caillau, Institut math., Univ. Bourgogne & CNRS/INRIA, 9 avenue Savary, F-21078 Dijon, `jean-baptiste.caillau@u-bourgogne.fr`

1 Transfert interplanétaire à consommation faible par utilisation des propriétés du problème des trois corps

Le travail en cours porte sur l'utilisation des propriétés de la dynamique du problème des trois corps [1, 3, 4] pour établir des missions interplanétaires à consommation faible [9]. En effet, on montre l'existence d'orbites périodiques [2] autour des points d'équilibre du système (appelés points de Lagrange). Des variétés invariantes sont issues de ces orbites périodiques et représentent des sortes de "courants gravitationnels". L'idée est alors d'utiliser ces variétés pour réaliser des trajectoires à consommation faible (le suivi de ces "courants" se fait avec une commande nulle). Si dans la littérature ce type de problème a déjà été étudié, la plupart des résultats sont obtenus en poussée forte : on réalise un transfert de variété par un changement instantané de vitesse modélisé par un incrément de vitesse. Ici, nous nous intéresserons au cas de la poussée faible. La difficulté réside alors dans l'obtention du transfert voulu entres variétés. Nous montrerons comment les techniques de contrôle optimal (méthode de tir) ainsi que les méthodes d'homotopie nous permettent de réaliser de tels transferts et d'établir des missions interplanétaires à consommation faible. Travail en commun avec P. Augros (Airbus-SD), T. Haberkorn (Univ. Orléans) et E. Trélat (Univ. Paris VI).

2 Modèle de potentiel complet et perturbations pour le contrôle optimal d'un engin spatial

Low thrust orbit transfer using electrical propulsion on satellite will become in close future a standard characteristic of commercial telecommunication satellites if we look on the advertisement done by satellite manufacturers like Boeing, EADS or Thales Alenia Space. The low thrust level of those thrusters increases significantly the transfer duration and the way of optimizing and controlling the transfer. With this type of thruster, the main optimization criterion at satellite level is a minimum time control strategy, or a minimum fuel control strategy with a transfer duration close to the minimum time. Those transfers present the following characteristics : A large number of revolutions with a rapidly rotating parameter (the longitude of the satellite), and a slow variation of the other orbital parameters. This two time scales in the satellite dynamics result into an ill conditioned optimal control problem. An efficient answer to this situation proposed in the literature is to perform averaging on the fast dynamic to remove the fast oscillations and solve the optimal control transfer problem on this average dynamics (see [7, 10, 5]). Efficient softwares based on this approach have been developed (see [12]). For theoretical and numerical reasons, the satellite longitude usually becomes the independent variable and replaces the time that becomes a state variable (see [10]) ; after solving the optimal control problem, the output time history is not a true time but an "average time" not very convenient to implementing the control, or to introduce time dependent perturbations. The averaging technique formulation proposed here keep the time as independent variable and not to perform the usual exchange between time and longitude for the independent variable. The major interest of this formulation is to enable the introduction of a full pertubated Keplerian model for the satellite dynamics with time dependent perturbations. The interest of the method will be illustrated on several test cases.

3 Period adding in first order systems controlled by relays

In this work we show how the dynamics of a very simple control model can be extremely rich, involving the existence of an infinite number of periodic orbits organized by Farey structures known as "period adding" bifurcation.
We consider a first order one-dimensional system

$$\dot{y} = f(y), \tag{1}$$

such that f is monotonically decreasing and has a simple zero, $f(\bar{y}) = 0$, which is a stable equilibrium point of system (1). This is a generalization of the linear case studied in [6]. We wish to stabilize system (1) at new equilibrium point y^* by applying a control action $u(t, y)$:

$$\dot{y} = f(y) + u(t, y). \tag{2}$$

The type of control that we will consider is based on *sliding-mode.* This is achieved by a relay, which performs a certain action when $y > y^*$ and another one otherwise so that, intuitively, solutions are "pushed" towards y^*.
After digitalizing the system by means of a period sampling and a "zero order holder", the dynamics of the system are given by a piecewise-smooth map of the form

$$f(x) = \begin{cases} f_{\mathcal{R}}(x) + \mu_{\mathcal{R}} & \text{if } x > 0 \\ f_{\mathcal{L}}(x) + \mu_{\mathcal{L}} & \text{if } x < 0 \end{cases}, \tag{3}$$

where the parameters $\mu_{\mathcal{R}}$ and $\mu_{\mathcal{L}}$ depend on the relay's gain and the desired equilibrium y^*.
We are hence interested in the bifurcation scenario in the $(\mu_{\mathcal{L}}, \mu_{\mathcal{R}})$-parameter space near the origin. When $f_{\mathcal{L}}(0) =$

$f_{\mathcal{R}}(0) = 0$, this point is a co-dimension two bifurcation given by the collision of two fixed points with the boundary $x = 0$. We prove [8] that, when both maps $f_{\mathcal{R}}$ and $f_{\mathcal{L}}$ are contracting and increasing near $x = 0$, the so-called *period adding* bifurcation occurs along any curve surrounding the origin of the parameter space. This bifurcation scenario has been widely observed in the literature in many disciplines. Under the mentioned assumptions, the map (3) can be seen as an orientation preserving discontinuous circle map, whose lifts undergo positive gaps at these discontinuities. This permits us to use and extend classical results for smooth circle maps just by adapting the topology. More precisely, we prove that, along the mentioned curve in the parameter space, the rotation number is well defined, monotonically increasing and continuous. The set of parameter values for which the rotation number is irrational has zero measure and hence it follows a devil's staircase. When the rotation number is rational, $\rho = P/Q$, there exist a unique and attracting "twist" periodic orbit whose symbolic sequence is "well ordered", *maximin* and given by the concatenation of the ones corresponding to its Farey "parents" rotation numbers : $p/q < r/s$ such that $P/Q = (p + r)/(q + s)$.
This bifurcation scenario not only explains the complete dynamics of system (2), but the symbolic dynamics may help to choose parameter settings for which one gets well distributed dynamics around the desired equilibrium.

4 Linéarisabilité de systèmes multi-entrées

Nous étudions la platitude des systèmes de contrôle non-linéaires de la forme :

$$\Xi : \dot{x} = F(x, u),$$

où x est l'état, défini sur un ouvert X de $\mathbb{R}^n$, et u est le contrôle, défini sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$. La notion de platitude a été introduite en théorie du contrôle dans les années 1990 par Fliess, Lévine, Martin et Rouchon. Toutes les solutions d'un système plat peuvent tre paramétrées par un nombre fini de fonctions et de leurs dérivées. Le système $\Xi : \dot{x} = F(x, u)$ est *plat* s'il existe m fonctions lisses $\varphi_i(x, u, \dots, u^{(p)})$ telles que localement

$$\begin{aligned} x &= \gamma(\varphi, \dots, \varphi^{(s)}) \\ u &= \delta(\varphi, \dots, \varphi^{(s)}), \end{aligned}$$

où $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est appelée *sortie plate*. La platitude est étroitement liée à la linéarisation par bouclage statique ou dynamique. Les systèmes statiquement linéarisables sont clairement plats et l'expression de x et u en fonction des sorties plates utilise le nombre minimal, i.e., $n+m$, des dérivées de φ_i. En général, les systèmes plats ne sont pas statiquement linéarisables, cependant ils peuvent tre vus comme la généralisation de ceux-ci. En effet, un système est plat si et seulement s'il est linéarisable par bouclage dynamique inversible et endogène. Le nombre minimal de dérivées de φ_i utilisées pour exprimer x et u est appelé le poids différentiel de la sortie plate φ. Une sortie plate de Ξ est appelée *minimale* si son poids différentiel est le plus petit parmi toutes les sorties plates de Ξ. Le *poids différentiel* d'un système plat Ξ est égal au poids d'une sortie plate minimale de Ξ et permet de déterminer la plus petite dimension possible d'un pré-compensateur linéarisant dynamiquement le système. Nous donnons une caractérisation complète des systèmes de contrôle qui ne sont pas linéarisables statiquement, mais qui le deviennent après l'application d'un bouclage dynamique aussi simple que possible. Ce sont les systèmes plats qui se rapprochent le plus des systèmes linéarisables statiquement et ils forment une classe particulière de systèmes plats : ils sont de poids différentiel $n + m + 1$. Dans un premier temps, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un système devienne statiquement linéarisable après la pré-intégration d'un contrôle adéquat (ou de manière équivalente, pour qu'il soit plat de poids différentiel $n + m + 1$). Ensuite, nous présentons les formes normales, donnons la description de sorties plates et en déduisons un système d'EDP à résoudre afin de calculer les sorties plates.

5 Probabilistic constraints in trajectory and fuel optimization of a three-stage launcher

This work, in collaboration with Airbus Defence and Space, is aimed at optimizing the fuel load and the flight sequence of a three-stage launcher whose mission is to deliver a payload to Geostationary Transfer Orbit (GTO). The goal is to design the lightest vehicle to accomplish the mission with at least a 90% probability, taking into account uncertainties in the model. In the deterministic part of the optimization process we'll show a comparison between two well-known NLP solvers : Ipopt and WORHP ; while the stochastic part will study two different approaches : the Kernel Density Estimation and the Arrow-Hurwicz Algorithm.

Références

[1] Archambeau, G., *Étude de la dynamique des points de Lagrange*, PhD thesis, Université Paris-sud XI, 2008.

[2] Archambeau, G. ; Augros, P. ; Trélat, E., *Eight-shaped Lissajous orbits in the Earth-Moon system*, MathS in Action 4 (2011), no. 1, 1–23.

[3] Bonnard, B. ; Faubourg, L. ; Trélat, E., *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*, Springer, 2005.

[4] Caillau, J.-B. ; Daoud, B. ; Gergaud, J., *Minimum fuel control of the planar circular restricted three-body problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom. 114 (2012), no. 1, 137–150.

[5] Edelbaum, T. N. ; Sackett, L. L. ; Malchow, H. L., *Optimal low-thrust geocentric transfer*, AIAA 73-1074, AIAA 10th Electric Propulsion Conference, Lake Tatiol, NE, 1973.

[6] Fossas, E. ; Granados, A., *Occurrence of big bang bifurcations in discretized sliding-mode control systems*, Diff. Eqs. Dyn. Syst. 21 (2013), 35–43.

[7] Geffroy, S. ; Epenoy, R., *Optimal low-thrust transfer with constraints. Generalization of averaging techniques*, Acta Astronautica 41 (1997), no. 3, 133–149.

[8] Granados, A. ; Alsedà, Ll. ; Krupa, M., *Period adding and incrementing in one-dimensional discontinuous maps : Theory and applications*, Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1407.1895`, 2014.

[9] Haberkorn, T., *Transfert orbital à poussée faible avec minimisation de la consommation : résolution par homotopie différentielle*, PhD thesis, INPT, 2004.

[10] Kluever, C. A. ; Oleson, S. R., *Direct approach for computing near-optimal low-thrust Earth-orbit transfers*, Journal of Spacecraft and Rockets 35 (1998).

[11] Koon, W. S. ; Lo, M. W. ; Marsden, J. E. ; Ross, S. D., *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design*, Springer-Verlag New York, LLC, 2006.

[12] Petropoulos, A. E. ; Tarzi, Z. B. ; Lantoine, G. ; Dargent, T. ; Epenoy, R., *Techniques for designing many revolution electric-propulsion trajectories*, Space Flight Mechanics Conference, Paper AAS-14-312, Santa Fe, New Mexico, USA, 2014.