Mini-symposium LowMach
Limite incompressible d'écoulements compressibles, analyse théorique et numérique.

Résumé

En mécanique des fluides, le nombre de Mach est un nombre sans dimension qui exprime le rapport de la vitesse locale d'un fluide à la vitesse du son dans ce même fluide. Lorsque ce nombre est très petit, les compressions dues aux variations de pression peuvent être négligées, et l'écoulement peut être considéré, en première approximation, comme étant incompressible.

D'un point de vue théorique, de nombreuses recherches ont pour objectif de justifier rigoureusement la transition d'un écoulement à nombre de Mach strictement positif, c'est-à-dire compressible, vers un écoulement à nombre de Mach nul, c'est-à-dire incompressible.

D'un point de vue applicatif, peuvent intervenir, dans de nombreuses configurations industrielles, des transitions entre un écoulement incompressible ou faiblement compressible vers un écoulement fortement compressible. C'est le cas par exemple lorsque l'on étudie des situations accidentelles dans le domaine de la sûreté nucléaire. Il est alors essentiel de disposer de méthodes numériques permettant de simuler des écoulements à tout nombre de Mach.

L'objectif de ce mini-symposium est de réunir des spécialistes de l'analyse théorique de ces problèmes, mais aussi des analystes numériciens qui s'intéressent à l'aspect *asymptotic preserving* des méthodes numériques dans la limite bas Mach.

Organisateur(s)

1. **Khaled SALEH**, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1.

Liste des orateurs

1. **Christophe CHALONS**, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ
   Titre : All-regime Lagrange-remap numerical schemes on unstructured meshes for the gas dynamics equations. Applications to the large friction and low-Mach regimes.
2. **Jean-Claude LATCHÉ**, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire
   Titre : Une classe de schémas préservant l'asymptotique pour les écoulements à faible nombre de Mach.
3. **Didier BRESCH**, CNRS – LAMA, Chambéry
   Titre : Mixture in fluid mechanics.
4. **Šárka NEČASOVÁ**, Instit. of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic
   Titre : Singular limits in a model of radiative flow.

Khaled SALEH, Université de Lyon, Université Lyon 1, Institut Camille Jordan, UMR CNRS 5208, 43 bd du 11 novembre 1918, F - 69622 Villeurbanne Cedex, France, `saleh@math.univ-lyon1.fr`
Christophe CHALONS, Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UMR 8100, UVSQ, UFR des Sciences, bâtiment Fermat, 45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, `christophe.chalons@uvsq.fr`
Jean-Claude LATCHÉ, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire, `jean-claude.latche@irsn.fr`
Didier BRESCH, LAMA – UMR5127 CNRS, Bat. Le Chablais, Campus Scientifique, 73376 Le Bourget du Lac, France, `didier.bresch@univ-savoie.fr`
Šárka NEČASOVÁ, Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic, Žitná 25, 115 67 Prague 1, Czech Republic, `matus@math.cas.cz`

1 All-regime Lagrange-remap numerical schemes on unstructured meshes for the gas dynamics equations. Applications to the large friction and low-Mach regimes

Auteurs : C. Chalons[(a)], M. Girardin[(b)], S. Kokh[(c)]

[(a)] : Laboratoire de Mathématiques de Versailles, UVSQ (christophe.chalons@uvsq.fr)
[(b)] : CMAP, Ecole Polytechnique (mathieu.girardin@polytechnique.edu)
[(c)] : Maison de la Simulation, CEA Saclay (samuel.kokh@cea.fr)

We present a numerical scheme based on a Lagrange-Remap approach for compressible fluid systems on unstructured grids and that does not involve any moving mesh. We show how to obtain the stability under a CFL condition involving only the material velocity (and neither the acoustic waves nor the possibly stiff source terms). We also show how to obtain the all-regime property that allows to provide an accurate and stable solver for simulations involving low-Mach and large friction regimes.

2 Une classe de schémas préservant l'asymptotique pour les écoulements à faible nombre de Mach

Auteurs : R. Herbin[(a)], J.-C. Latché[(b)], K. Saleh[(c)], M.-H. Vignal[(d)]

[(a)] : I2M, Aix-Marseille Université (raphaele.herbin@univ-amu.fr)
[(b)] : Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (jean-claude.latche@irsn.fr)
[(c)] : ICJ, Université Claude Bernard Lyon 1 (saleh@math.univ-lyon1.fr)
[(d)] : IMT, Université Paul Sabatier Toulouse 3 (mhvignal@math.univ-toulouse.fr)

Depuis quelques années, un effort important a été consacré au développement de schémas pour la simulation numérique des écoulements compressibles sur mailles décalées, *i.e.* s'appuyant sur une discrétisation en espace (structurée ou non) des variables scalaires au centre des mailles et des vitesses aux faces [5, 8, 7, 6]. Du fait de ce choix, il est difficile d'utiliser des techniques dites de "décentrement système", basées sur des solutions de problèmes de Riemann, et ces schémas sont stabilisés par un simple décentrement amont des termes convectifs par rapport à la vitesse matérielle. L'opérateur de gradient pour la pression est construit comme le transposé de l'opérateur de divergence pour la vitesse, et est donc essentiellement centré. Les propriétés usuelles ont été démontrées pour ces schémas : existence de solutions, préservation des états admissibles, stabilité, inégalités d'entropie, consistance au sens de Lax. Outre leur simplicité et leur efficacité (les flux numériques sont très aisés à construire), ces schémas présentent l'intérêt suivant : si l'on suppose la masse volumique constante, ils dégénèrent vers un algorithme standard (et éprouvé) pour l'incompressible. En particulier, la discrétisation en espace garantit le contrôle de la pression en norme L^2 par le contrôle de son gradient en norme H^{-1} (propriété dite *inf-sup* discrète).

Dans cet exposé, nous nous plaçons dans le cas des équations de Navier-Stokes compressibles barotropes, et démontrons que la convergence vers le schéma pour l'incompressible est réellement obtenue : lorsque le nombre de Mach tend vers zéro, la masse volumique tend effectivement vers une constante. Afin de décrire plus précisément ce résultat, soit ρ^ε, $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et p^ε respectivement la masse volumique, la vitesse et la pression discrètes, solutions du schéma implicite pour le système d'équations suivant :

$$\partial_t \rho^\varepsilon + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon\, \boldsymbol{u}^\varepsilon) = 0, \tag{1a}$$

$$\partial_t(\rho^\varepsilon\, \boldsymbol{u}^\varepsilon) + \mathrm{div}(\rho^\varepsilon\, \boldsymbol{u}^\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}\, \boldsymbol{\nabla} p^\varepsilon - \mu \Delta \boldsymbol{u}^\varepsilon - \frac{\mu}{3} \boldsymbol{\nabla} \mathrm{div} \boldsymbol{u}^\varepsilon = 0, \tag{1b}$$

$$p^\varepsilon = (\rho^\varepsilon)^\gamma, \tag{1c}$$

où $\gamma > 1$ est un coefficient caractéristique du fluide. Le problème est posé sur un domaine de calcul Ω de $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ ou 3, et sur l'intervalle de temps borné $(0, T)$. Nous travaillons à maillage et pas de temps fixes, et obtenons une famille de solutions dépendant du paramètre ε, qui peut être identifié au nombre de Mach. Nous supposons des conditions aux limites de Dirichlet homogènes pour la vitesse, et nous donnons des conditions initiales pour $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et ρ^ε qui s'écrivent, pour cette dernière variable :

$$\rho_0^\varepsilon = 1 + \varepsilon^2 \delta\rho_0^\varepsilon(\boldsymbol{x}),$$

où $\delta\rho_0^\varepsilon$ est une fonction uniformément bornée telle que ρ_0^ε soit strictement positif, pour tout paramètre ε considéré. Soit δp^ε défini par :

$$\delta p^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\big(p^\varepsilon - m(p^\varepsilon)\big),$$

où $m(p^\varepsilon)$ désigne la moyenne de p^ε sur Ω. Nous supposons, pour simplifier l'énoncé des résultats, que le pas de temps est suffisamment petit pour que le problème discret (2) ci-dessous ait une seule solution. Alors, lorsque ε tend vers zéro :

- ρ^ε tend vers la fonction constante égale à 1 dans $L^\infty((0,T); L^q(\Omega))$ pour $1 \leq q \leq \min(\gamma, 2)$ et $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ est bornée dans l'analogue discret de la norme $L^2((0,T); H_0^1(\Omega)^d)$;
- $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ et δp^ε convergent vers une limite $\boldsymbol{u}$ et δp solution du schéma obtenu en identifiant ρ à 1 dans (1), qui est un schéma standard pour le système :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{u}) = 0, \tag{2a}$$

$$\partial_t(\boldsymbol{u}) + \mathrm{div}(\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\nabla}\delta p - \mu\Delta\boldsymbol{u} - \frac{\mu}{3}\boldsymbol{\nabla}\mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, \tag{2b}$$

  avec une condition initiale pour $\boldsymbol{u}$ qui est la projetée de $\boldsymbol{u}_0$ sur l'espace des fonctions à divergence discrète nulle. Comme nous travaillons dans un espace discret, cette convergence a lieu dans n'importe quelle norme. Il est à noter, toutefois, que les majorations qui conduisent à ce résultat explosent lorsque le pas de maillage tend vers zéro. Si nous nous limitions aux estimations indépendantes du maillage, seule une convergence faible de $\boldsymbol{u}$, à l'extraction d'une sous-suite près, subsisterait, et toute limite vérifierait les équations de Navier-Stokes incompressible au sens faible usuel (contre des fonctions test à divergence nulle), ce qui est le résultat connu en continu.

L'analyse présentée ici adapte au niveau discret la théorie développée dans [9]. Elle s'étend à deux discrétisations en temps différentes, qui ont pour résultat de découpler les équations en faisant apparaître un problème elliptique discret pour la pression. Ce sont ces schémas qui ont un intérêt en pratique ; l'un d'entre eux est utilisé quotidiennement dans le logiciel P^{2}REMICS de l'IRSN, pour la simulation des déflagrations en phase gazeuse (explosion d'hydrogène). Dans ces deux cas, le problème limite (2) a bien une solution unique quel que soit le maillage et le pas de temps.

3 Mixture in fluid mechanics

Auteur : D. Bresch

CNRS – LAMA, Chambéry (didier.bresch@univ-savoie.fr)

In this talk, I will present some nonlinear hypo-coercivity properties in fluid mechanics. I will show that behind this mathematical object, there are two velocities and a mixture ratio even if the unknowns are a-priori only one density and one velocity field. This will help us to conclude with nice mathematical properties for some low Mach number system and compressible Navier-Stokes equations with degenerate viscosities. I will also discuss some possible extensions. This talk is the result of joint works with B. Desjardins, V. Giovangigli and E. Zatorska.

4 Singular limits in a model of radiative flow

Auteurs : B. Ducomet[(a)], Šárka NEČASOVÁ[(b)]

[(a)] : CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France (bernard.ducomet@cea.fr)
[(b)] : Instit. of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic(matus@math.cas.cz)

We consider relativistic and "semi-relativistic" models of radiative viscous compressible Navier-Stokes-Fourier system coupled to the radiative transfer equation extending the classical model introduced in [1] and we study some of its singular limits (low Mach and diffusion) in the case of well-prepared initial data and Dirichlet boundary condition for the velocity field, see [2, 3, 4]. In the low Mach number case we prove the convergence toward the incompressible Navier-Stokes system coupled to a system of two stationary transport equations. In the diffusion case we prove the convergence toward the compressible Navier-Stokes with modified state functions (equilibrium case) or toward the compressible Navier-Stokes coupled to a diffusion equation (non equilibrium case).

Références

[1] B. Ducomet, E. Feireisl, Š. Nečasová : On a model of radiation hydrodynamics. Ann. I. H. Poincaré-AN 28 (2011) 797–812.

[2] B. Ducomet, Š. Nečasová : Low Mach number limit in a model of radiative flow, Journal of Evolution equations, 14 (2014) 357–385.

[3] B. Ducomet, Š. Nečasová : Diffusion limits in a model of radiative flow, to appear in Annali dell Universita di Ferrara, DOI 10.1007/s11565-014-0214-3.

[4] B. Ducomet, Š. Nečasová : Singular limits in a model of radiative flow, submitted, Preprint of Math. Institute, 2014, www.math.cas.cz

[5] T. Gallouët, L. Gastaldo, R. Herbin, J.-C. Latché. An unconditionally stable pressure correction scheme for compressible barotropic Navier-Stokes equations. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **42**, 303–331 (2008).

[6] D. Grapsas, R. Herbin, W. Kheriji, J.-C. Latché. An unconditionally stable staggered pressure correction scheme for the compressible Navier-Stokes equations. Submitted (2015).

[7] R. Herbin, W. Kheriji, J.-C. Latché. On some implicit and semi-implicit staggered schemes for the shallow water and Euler equations. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **48**, 1807–1857 (2014).

[8] W. Kheriji, R. Herbin, J.-C. Latché. Pressure correction staggered schemes for barotropic monophasic and two-phase flows, Computers & Fluids, **88**, 524–542 (2013).

[9] P.-L. Lions, N. Masmoudi. Incompressible limit for a viscous compressible fluid. Journal de Mathémathiques Pures et Appliquées, **77**, 585–627 (1998).