Mini-symposium PATAT
Tomographie Photo et Thermo Acoustique

Mini-symposium porté par l'ANR AVENTURES (Analyse Variationnelle EN Tomographies UltrasonoRES)

Résumé

Le but de ce mini-symposium est de présenter la tomographie thermo/photo acoustique, une technique d'imagerie médicale hybride, du point de vue physique (modèle acoustique et optique) et mathématique (analyse variationnelle). Elle est qualifiée d'hybride au sens où elle consiste à éclairer les tissus à imager par une onde lumineuse ou radio et à mesurer les ondes sonores générées par l'expansion des tissus dues à l'absorption de l'énergie de l'illumination. Il s'agit d'un problème inverse faisant intervenir une équation de Maxwell (ou de transfert radiatif suivant la longueur d'onde) pour l'illumination, une équation de la chaleur pour la conversion de l'énergie déposée en chaleur et une équation des ondes pour la génération de l'onde sonore qui sera mesurée. Une des approches employées et présentée par au moins un des orateurs sera celle de l'écriture de ce problème inverse comme un problème de contrôle optimal, cette approche étant une de celles poursuivies par le projet ANR sur lequel est adossé ce mini-symposium. Les différents exposés seront :

Thermo-Acoustic Tomography Model : (Hassan Akhouayri, Maïtine Bergounioux, Anabela Da Silva, Peter Elbau, Thomas Haberkorn, Amélie Litman, Leonidas Mindrinos) Dans cette présentation, on détaillera les différentes équations électromagnétiques, thermiques et acoustiques qui permettent de décrire les phénomènes couplés exploités dans le cadre de la tomographie thermo-acoustique (TAT) pour laquelle le champ électromagnétique excitateur est émis dans une gamme de longueurs d'onde centimétriques.

Un problème de contrôle optimal en Tomographie Photo Acoustique : (Maïtine Bergounioux, Xavier Bonnefond, Thomas Haberkorn, Yannick Privat) On présente le problème de tomographie photo acoustique dans lequel on cherche à reconstruire le coefficient d'absoption et de diffusion d'un corps mou. On écrit ce problème inverse sous la forme d'un problème de contrôle optimal, où le contrôle est les coefficient à reconstruire. Une étude mathématique de ce problème est donné ainsi que quelques résultats numériques.

Sur l'unicité et la stabilité d'un problème inverse en tomographie photoacoustique : (Maïtine Bergounioux, Erica Schwindt) On considère un modèle de tomographie photoacoustique simplifié et une formulation variationnelle du problème inverse. On s'intéresse à l'analyse de sensibilité de la solution optimale (coefficient de diffusion) par rapport aux variations de la source d'un part et de l'observation d'autre part.

Optimisation du placement des capteurs pour l'imagerie médicale : (Maïtine Bergounioux, Pierre Jounieaux, Yannick Privat) Dans le cadre de l'équation des ondes, on se propose de modéliser l'influence de la forme et de la disposition des capteurs sur la reconstruction d'une image par tomographie. Plus précisément il s'agira de déterminer la disposition de capteurs qui maximise la constante d'observabilité.

Organisateur(s)

1. **Thomas Haberkorn**, FDP-MAPMO, Université d'Orléans.

Liste des orateurs

1. **Amélie Litman**, AMU-CNRS-ECM, Institut Fresnel, Marseille
   Titre : Thermo-Acoustic Tomography Model.
2. **Thomas Haberkorn**, FDP-MAPMO, Université d'Orléans
   Titre : Un problème de contrôle optimal en Tomographie Photo Acoustique.

3. **Erica Schwindt**, FDP-MAPMO, Université d'Orléans
   Titre : Sur l'unicité et la stabilité d'un problème inverse en tomographie photoacoustique.
4. **Pierre Jounieaux**, Université Pierre et Marie Curie, LJLL
   Titre : Optimisation du placement des capteurs pour l'imagerie médicale..

Thomas Haberkorn, Université d'Orléans, FDP-MAPMO, UMR 7349, Bâtiment de Mathéematiques, BP 6759, 45067 Orléans cedex 2, France, thomas.haberkorn@univ-orleans.fr
Amélie Litman, Institut Fresnel UMR 7249, Campus Universitaire de Saint Jérôme, Aev Escadrille Normandie Niemen, 13397 MARSEILLE Cedex 20, amelie.litman@fresnel.fr
Erica Schwindt, Université d'Orléans, FDP-MAPMO, UMR 7349, Bâtiment de Mathéematiques, BP 6759, 45067 Orléans cedex 2, France, schwindt@math.cnrs.fr
Pierre Jounieaux, Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, F-75005, Paris, France, pierre.jounieaux@gmail.com

Ce mini-symposium regroupe quelques unes des contributions des membres de l'ANR AVENTURES (Analyse Variationnelle EN Tomographies UltrasonoRES) sur les problèmatiques de la tomographie thermo et photo acoustique, tant d'un point de vue modélisation, que théorique et numérique. Les 4 exposés aborderont les thèmes suivants :

- Le premier exposé, d'Amélie Litman, sera consacré à la modélisation du problème de Tomographie Thermo Acoustique.
- Le second exposé, de Thomas Haberkorn, s'intéressera au problème de Tomographie Photo Acoustique. Ce problème sera abordé sous la forme d'un problème de contrôle optimal dont on donnera une analyse mathématique ainsi que quelques résultats numérique.
- Le troisième exposé, d'Erica Schwindt, présentera une étude de l'unicité et de la stabilité du problème inverse de Photo Acoustique introduit dans le second exposé.
- Le quatrième exposé, de Pierre Jounieaux, s'intéressera au placement optimal des capteurs pour des problèmes de reconstruction en imagerie médicale.

1 Thermo-Acoustic Tomography Model

In photo-acoustic tomography (PAT), an electromagnetic (EM) wave in the optical range is sent through a biological object (e.g., a woman's breast in mammography) with the aim of triggering a thermo-elastic response in the tissue. In thermo-acoustic tomography (TAT), the same principle is applied except that the EM waves are chosen in the radiofrequency range. For these centimetric waves, the radiation pattern of the antenna is spatially wide with respect to the illuminated target and the whole object is more or less irradiated. As human tissues are known to be lossy, parts of the absorbed EM energy is transformed into a thermo-elastic expansion. This in turn results in a pressure wave which can be measured with transducers placed around the object. The TAT approach adequately combines the high resolution of the ultrasound diagnostics and the penetration depth of the EM waves.
In PAT, the EM illumination is described thanks to the diffusion equation or the light transport model. In TAT, it is the electromagnetic field itself which is the quantity of interest and thus, three-dimensional Maxwell equations must come in full play. In this talk, we will present a mathematical description of the various relations which link the polarized EM waves, the temperature variations and the acoustic pressure. The correct definition of these various equations is a prerequisite step before tackling a joint quantitative inversion procedure where the parameters of interest will be related to the electromagnetic (refractive indices), thermal (temperature rise) or acoustic (acoustic velocities) waves.

2 Un problème de contrôle optimal en Tomographie Photo Acoustique

Cet exposé reprend les travaux de [1] en y adjoignant quelques résulats numériques neufs. Dans cet exposé, on présentera le problème de la Tomographie Photo Acoustique, qui est une technique hybride d'imagerie de corps mous. Elle consiste à illuminer un corps par une source lumineuse (laser), cette dernière se diffuse alors dans le corps et est absorbée de manière différente suivant l'oxygènation des tissus. Ceci génère alors une onde acoustique qui peut être mesurée par des capteurs situés à l'extérieur du corps. Etant donné les échelle de temps présente, on modélise ce phénomène par une équation de dissusion (pour la lumière) et une équation des ondes, tout en négligeant la diffusion thermique.
Le problème consiste alors à reconstruire le coefficient d'absorption du corps, et éventuellement son coefficient de diffusion, à l'aide des mesures partielles de l'onde acoustique autour du corps. Etant donné le caractère mal posé d'un tel problème inverse, on choisit d'approcher cette reconstruction par le biais d'un problème de contrôle optimal où le contrôle est les coefficients à reconstruire et la *dynamique* est les deux équations du modèle.
On note le corps à imager Ω, et $\mathcal{B}$ un grand domaine contenant Ω. Si on note $p^{\mathrm{obs}}(t,x)$ l'onde mesurée sur le domaine (non connexe a priori) $\omega \in \mathcal{B}\backslash\Omega$, on cherche alors à miniser le critère d'attache aux données et de régularisation ($f(\mu)$) :

$$\min_{\mu=(\mu_a,D)} J(\mu) = \frac{1}{2}\int_{[0,T]\times\omega} (p_\mu(t,x) - p^{\mathrm{obs}}(t,x))^2 dxdt + f(\mu),$$

où $\mu_a(x)$ est le coefficient d'absorption et $D(x)$ le coefficient de diffusion. La pression $p_\mu(t,x)$ est solution d'une équation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial^2_{tt} p - div(v_s^2 \nabla p) = \mathbb{1}_\omega \Gamma \mu_a I & , in\ [0,T] \times \mathcal{B} \\ p([0,T], \partial\mathcal{B}) = p(0,\mathcal{B}) = \partial_t p(0,\mathcal{B}) = 0 & \end{array} \right. ,$$

où $\Gamma(x)$ est le coefficient de Grüneisen (connu) et v_s la vitesse du son dans le corps (connu et possiblement no uniforme). L'illumination $I(t,x)$ est, après simplifications, solution d'une équation de diffusion :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\nu} \partial_t I + \mu_a I - div(D \nabla I) = S & , in\ [0,T] \times \Omega \\ I(0,\Omega) = 0 & \end{array} \right. ,$$

où ν est la vitesse de la lumière (connue) et S est la source de l'illumination (connue).
On montre alors le caractère bien posé de cette formulation du problème inverse et on donne des résultats numériques de reconstruction du coefficient d'absorption μ_a dans le cas où on a peu de mesures.

3 Sur l'unicité et la stabilité d'un problème inverse en tomographie photoacoustique

Les auteurs de [1] ont étudié le modèle de la tomographie photo-acoustique et obtenu une formulation de contrôle optimal pour récupérer le coefficient d'absorption μ_a et le coefficient de diffusion D. Dans cette exposé, nous abordons la sensibilité de la solution optimale par rapport à la source de l'illumination S et la donnée d'observation p^{obs}, en supposant que le coefficient de diffusion D est constant.
Nous étudions deux cas particuliers correspondant à des questions pratiques.
Dans le premier cas, nous supposons que nous voulons reconstruire une image d'un seul objet, par exemple un tissu biologique (dans le cas de tumeurs du sein) à une date fixe. Le processus de reconstruction est sensible à la source de l'illumination S mais on peut le contrôler. Dans ce cas, il est raisonnable de supposer que la variation de la donnée d'observation p^{obs} est contrôlée par la variation de la source.
Dans le second cas, on décide d'éclairer deux objets différents avec la même source : c'est le cas, par exemple, dans un processus d'étalonnage. Habituellement, les physiciens effectuent des acquisitions par la différence lorsque l'objet est difficile à récupérer. Ils font une image de l'arrière-plan sans l'objet et une autre image de l'arrière-plan avec l'objet. Bien sûr, les mesures sont différentes mais, dans de nombreuses situations, proches (lorsque l'objet est difficile à localiser). En outre, à ces processus d'étalonnage, nous considérons un tissu biologique duquel nous voulons obtenir des images sur une grande échelle de temps, pour détecter l'apparition de micro-tumeurs par exemple. Dans ce cas, les objets sont proches (si les dates d'acquisition sont assez proches, et la maladie n'est pas avancée) et nous voulons estimer la différence entre les deux objets, à savoir les nouvelles tumeurs ou celle qui ont disparu.
Dans ces deux cas, l'objectif peut être atteint en caractérisant la dérivée de μ_a par rapport à la source S et/ou par rapport à l'observation p^{obs}.

4 Optimisation du placement des capteurs pour l'imagerie médicale

La tomographie thermoacoustique est un procédé d'imagerie médicale ultra-sonore, encore peu développé qui est une alternative précise, plus économique, et non invasive à l'imagerie X. C'est dans le cadre de ce procédé et, suivant le modèle introduit et étudié dans [1], dans le cadre de l'équation des ondes, que l'on se propose de modéliser l'influence de la forme et de la disposition des capteurs. En effet lorsque l'on considère le problème de reconstruction de la densité des tissus constituant le domaine à imager, il s'agit en pratique d'implémenter les méthodes classiques de résolution de problèmes inverses, et la question du bon conditionnement de ce problème s'impose naturellement. Or la bonne disposition des capteurs, guarantit précisément ce conditionnement.
Plus précisément il s'agira de déterminer la disposition de capteurs qui maximise la constante d'observabilité. De fait, cette constante quantifie le rapport entre les conditions initiales d'une EDP et la quantité que les capteurs sont en mesure d'observer, autrement dit le conditionnement évoqué plus haut. L'étude de cette constante proposée dans [2], pour des observations à la frontière du domaine montre la complexité de produire, tant théoriquement que numériquement, des domaines optimaux.

La partie principale de cet exposé consistera alors à produire une fonctionnelle objectif, dépendant à la fois de la constante d'observabilité et du signal observé, disposant des propriétés nécéssaires à produire des dispositions optimales de capteurs raisonnables dans la pratique. Plus précisément, l'introduction d'un certain nombre de termes régularisants sera motivée par l'existence de *faisceaux gaussiens*, introduits dans [3], solutions limites de l'équation des ondes se concentrant autour de rayons se propageant dans le domaine.
Dans la dernière partie de cet exposé nous présenterons un certain nombre de simulations numériques, illustrant d'une part les résultats précédents, mais aussi certains phénomènes d'instabilité numérique intéressants.

Références

[1] M. Bergounioux, X. Bonnefond, T. Haberkorn, Y. Privat, *An optimal control problem in photoacoustic tomography*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 24(12), 2525-2548 (2014).

[2] P. Jounieaux, Y. Privat, E. Trélat, *Optimal boundary observation domain for the wave equation* ESAIM : Proceedings and Surveys, 45, 475-484 (2014).

[3] J. Ralston *Gaussian beams and the propagation of singularities*, Studies in Partial Differential Equations, W. Littman, ed., MAA Studies in Math., Vol. 23, 1982, pp. 206-248 (1982).