

# *Mini-symposium EDMQ*

## *Etude de modèles quantiques*



Mini-symposium en partie supporté par le projet INTEGER : PEPS EGALITE  
Etude théorique et numérique du système de Navier-Stokes quantique

### Résumé

Les modèles quantiques peuvent être utilisés pour décrire des superfluides [3], des semi-conducteurs quantiques [1], des gaz de Boses [2] ou des trajectoires quantiques de mécanique Bohmiennes [4]. Dans ce mini-symposium, nous nous intéresserons aussi bien à la dérivation des modèles quantiques qu'à leur étude. Nous discuterons en effet, de la dérivation des équations de Navier-Stokes quantiques via un développement de Chapman-Enskog à partir de l'équation de Wigner (cf exposé 2). Nous présenterons également des méthodes d'énergie ou d'ajout de pression froide permettant de montrer l'existence de solutions pour des modèles classiques (cf exposé 1), et, nous montrerons comment ces techniques peuvent être aussi utilisées pour des modèles quantiques (cf exposé 3). Enfin nous nous intéresserons à l'existence de solutions globales pour un second modèle quantique, le modèle hydrodynamique quantique (cf exposé 4).

### Organisateur(s)

1. **Marguerite Gisclon**, Université Savoie Mont Blanc.
2. **Ingrid Lacroix-Violet**, Université de Lille 1 sciences et technologies.

### Liste des orateurs

1. **Corentin Audiard**, Université Pierre et Marie Curie  
*Titre* : Solutions globales pour les équations de l'hydrodynamique quantique (exposé 4).
2. **Stéphane Brull**, Université de Bordeaux  
*Titre* : Dérivation d'un modèles de Navier-Stokes quantique isotherme (expoé 2).
3. **Ingrid Lacroix-Violet**, Université de Lille 1 sciences et technologies  
*Titre* : Existence de solutions pour les équations de Navier-Stokes quantiques compressibles et barotropiques (exposé 3).
4. **Charlotte Perrin**, Université Savoie Mont Blanc  
*Titre* : Modèles biphasiques compressible/incompressible en mécanique des fluides (exposé 1).

### Références

- [1] D. FERRY ET J.-R. ZHOU, *Form of the quantum potential for use in hydrodynamic equations for semiconductor device modeling*, Phys. Rev. B, Vol 48, 1993, 7944-7950.
- [2] J. GRANT, *Pressure and stress tensor expressions in the fluid mechanical formulation of the Bose condensate equations.*, J. Phys. A : Math., Nucl. Gen., Vol 6, 1973, 151-153..
- [3] M. LOFFREDO ET L. MORATO, *On the creation of quantum vortex lines in rotating He II*, Il nuovo cimento, 108B, 1993, 205-215.
- [4] R. WYATT, *Quantum Dynamics with Trajectories*, Springer, New York, 2005.

**Marguerite Gisclon**, Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 5127, UFR SFA, Université Savoie Mont Blanc, 73376 Le bourget du lac, [Marguerite.Gisclon@univ-savoie.fr](mailto:Marguerite.Gisclon@univ-savoie.fr)

**Ingrid Lacroix-Violet**, Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille 1, Cité scientifique, 59655 Villeneuve d'Ascq, [ingrid.violet@univ-lille1.fr](mailto:ingrid.violet@univ-lille1.fr)

**Corentin Audiard**, Laboratoire Jacques Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie 75252 Paris Cedex 05, [corentin.audiard@ljl1.math.upmc.fr](mailto:corentin.audiard@ljl1.math.upmc.fr)

**Stéphane Brull**, Université de Bordeaux, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE cedex, [Stephane.Brull@math.u-bordeaux1.fr](mailto:Stephane.Brull@math.u-bordeaux1.fr)

**Charlotte Perrin**, Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 5127, UFR SFA, Université Savoie Mont Blanc, 73376 Le bourget du lac, [charlotte.perrin@univ-savoie.fr](mailto:charlotte.perrin@univ-savoie.fr)

Ce mini-symposium comporte quatre exposés. Nous commencerons via le premier exposé par décrire l'utilisation de méthodes d'énergie et d'ajout de pression froide pour le modèle de Navier-Stokes compressibles. Dans un deuxième exposé nous montrerons comment dériver depuis l'équation de Wigner et via un développement de Chapman-Enskog, les équations de Navier-Stokes quantiques. Dans le troisième exposé, en utilisant les techniques présentées dans le premier, nous démontrerons l'existence de solutions pour les équations dérivées dans le second. Enfin dans le dernier nous montrerons comment obtenir des solutions globales pour un autre modèle quantique, le modèle hydrodynamique quantique.

## 1 Modèles biphasiques compressible/incompressible en mécanique des fluides

*Cet exposé sera donné par C. Perrin.*

Cet exposé a pour but l'étude d'un modèle de type Navier-Stokes compressible en lien avec la théorie des écoulements granulaires. Pour ce type de systèmes, les lois d'états doivent tenir compte d'une contrainte de congestion et de l'existence d'une densité maximale qui ne peut pas être dépassée. On doit alors considérer des viscosités (dégénérées au voisinage du vide) et une loi de pression qui sont toutes singulières au voisinage de cette densité maximale. Après avoir montré l'existence de solutions faibles globales en temps pour ce type d'équations, nous expliquerons comment aboutir à un modèle biphasique original couplant zones "libres" et zones "congestionnées" via des perturbations singulières. Il sera aussi question durant cette présentation des outils mathématiques pouvant intervenir dans l'étude des systèmes visqueux quantiques.

## 2 Dérivation d'un modèle de Navier-Stokes quantique isotherme

*Cet exposé sera donné par S. Brull.*

Dans cet exposé, nous partons d'un modèle de Wigner-BGK pour un scaling ad-hoc. Pour, l'opérateur BGK la Maxwellienne quantique est construite à partir des travaux de Degond et Ringhoffer qui généralisent à un cadre quantique le principe de minimisation de l'entropie sous contrainte. Ensuite, nous expliquerons comment grâce à un développement de Chapman-Enskog à l'ordre 1, nous obtenons un modèle de Navier-Stokes quantique.

## 3 Existence de solutions pour les équations de Navier-Stokes quantiques compressibles et barotropiques

*Cet exposé sera donné par I. Lacroix-Violet.*

Dans cette présentation, nous considèrerons les équations de Navier-Stokes quantiques compressibles et barotropiques avec une viscosité dépendant linéairement de la densité. En suivant les idées développées dans des travaux récents pour les équations de Navier-Stokes compressibles classiques, nous montrerons comment obtenir l'existence globale de solution faible via l'ajout d'un terme de pression froide et pour la définition usuelle de solution faible.

## 4 Solutions globales pour les équations de l'hydrodynamique quantique

*Cet exposé sera donné par C. Audiard.*

Les équations de l'hydrodynamique quantique (QHD) s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla g(\rho) = \frac{1}{2} \nabla \left( \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right). \end{cases} \quad (1)$$

Pour  $u$  irrotationnel, une correspondance formelle entre ces équations et une équations de type Schrödinger non linéaire s'obtient par la transformation de Madelung. Si  $\psi$  est solution de

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi = g(|\psi|^2)\psi, \quad (2)$$

alors  $\rho = |\psi|^2$ ,  $u = \text{Im}(\overline{\psi}\nabla\psi)/|\psi|^2$  donnent une solution de (1). La correspondance entre ces deux modèles a été utilisée récemment par Antonelli-Marcati [1] pour construire des solutions faibles globales de (1). La principale limite de cette approche est qu'il est délicat de donner un sens à la transformée de Madelung lorsque  $\rho$  (ou  $|\psi|$ ) s'annule, ce qui arrive pour les non linéarités usuelles type  $|\psi|^\alpha\psi$ . Pour  $g(\rho) = \rho - 1$ , on montre ici comment des résultats récents sur le scattering de (2) (voir [2]) permettent d'obtenir la nature bien posée pour de petites données du problème (1).

## Références

- [1] P. ANTONELLI AND P. MARCATI, *On the finite energy weak solutions to a system in quantum fluid dynamics*, Comm. Maths. Phys, 2009.
- [2] S. GUSTAFSON, K. NAKANISHI AND T.-P. TSAI, *Scattering theory for the Gross-Pitaevskii equation in three dimensions*, Comm. Contemp. Math., 11 no. 4 (2009) 657-707.