Mini-symposium APPARA
Approche numérique pour les équations aux dérivées partielles raides

Mini-symposium porté par l'ANR Moonrise

Résumé

Ce mini-symposium sera une opportunité de présenter l'état de l'art dans la construction de méthodes numériques efficaces pour les problèmes à forte dissipation ou hautement oscillants tels que les modèles cinétiques ou de Schrödinger. Différentes approches seront évoquées et des problèmes ouverts seront discutés.

Organisateur(s)

1. **Nicolas Crouseilles**, Inria-Rennes Bretagne Atlantique.
2. **Mohammed Lemou**, CNRS, IRMAR Université de Rennes I.

Liste des orateurs

1. **Giacomo Dimarco**, Université de Ferrara
   Titre : Schémas multi-échelles pour le système de Vlasov-Poisson-BGK dans les limites quasi-neutres et fluides.
2. **Hélène Hivert**, Université de Rennes I
   Titre : Schémas AP pour l'équation cinétique avec limite de diffusion anormale.
3. **Marie-Hélène Vignal**, Université de Toulouse III
   Titre : Schémas volumes finis préservant la limite bas Mach pour le système d'Euler.
4. **Gilles Vilmart**, Université de Genève
   Titre : Méthodes numériques d'homogénéisation pour des EDP multi-échelles quasi-linéaires.

Nicolas Crouseilles, Inria-Rennes Bretagne Atlantique, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes, `nicolas.crouseilles@inria.fr`
Mohammed Lemou, CNRS, IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes, `mohammed.lemou@univ-rennes1.fr`
Giacomo Dimarco, Department of Mathematics and Computer Science. University of Ferrara, Via Machiavelli 35, 44122 Ferrara, Italy., `giacomo.dimarco@unife.it`
Hélène Hivert, IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes, `helene.hivert@univ-rennes1.fr`
Marie-Hélène Vignal, Université de Toulouse III, Institut de Mathématiques de Toulouse, 118 route de Narbonne, 310622 Toulouse cedex 9, `mhvignal@math.univ-toulouse.fr`
Gilles Vilmart, Université de Genève, Section de mathématiques, 2-4 rue du Lièvre, Case postale 64, 1211 Genève, Suisse, `gilles.vilmart@unige.ch`

La simulation numérique de phénomènes raides (oscillations rapides ou forte dissipation) impose habituellement une restriction importante sur les paramètres numériques afin de capturer correctement la dynamique raide. Pour éviter cette restriction, une approche connue pour approcher la solution est d'utiliser les modèles asymptotiques, ce qui revient à considérer que le paramètre physique (qui mesure le taux de relaxation ou la période d'oscillation) tend vers zéro. Cependant, cela peut se réveler insuffisant lorsque ce paramètre prend des valeurs plus grandes à un certain temps ou dans une certaine partie du domaine physique.
Pour éviter cette restriction importante sur les paramètres numériques et pour aller au-delà de la simple résolution des modèles asymptotiques, une autre classe de méthodes a récemment été examinée, permettant de traiter les différents régimes. Parmi les différents modèles qui entrent dans ce cadre, on citera les modèles cinétiques collisionnels ou non avec différents scalings (diffusion, fluide, gyrocinétique, ...) ou encore les équations de Schrödinger non linéaires hautement oscillantes.
Ce mini-symposium sera une opportunité de présenter l'état de l'art dans la construction de méthodes numériques efficaces pour les problèmes à forte dissipation ou hautement oscillants. Différentes approches seront évoquées et des problèmes ouverts seront discutés.

1 Schémas multi-échelles pour le système de Vlasov-Poisson-BGK dans les limites quasi-neutres et fluides

Orateur : Giacomo Dimarco
Résumé : Dans cet exposé, nous présentons le développement de schémas asymptotiquement stable dans les limites quasi-neutre et fluide pour le système de Vlasov-Poisson-BGK. Dans ces limites, les schémas classiques ont une restriction sur le pas de temps dû aux petites périodes plasma et nombre de Knudsen. Pour résoudre ce problème, nous proposons un schéma stable pour tout choix de pas de temps, indépendamment des petites échelles et avec un coût de calcul comparable par rapport aux schémas explicites standards. De plus, ce schéma dégénère automatiquement en une discrétisation consistante des systèmes asymptotiques sous-jacents.

2 Schémas AP pour l'équation cinétique avec limite de diffusion anormale

Orateur : Hélène Hivert
Résumé : On considère une équation cinétique avec un noyau de collision qui a une fonction à queue lourde comme équilibre. Son comportement asymptotique a été étudié dans [1, 2] : il s'agit de l'équation dite de *diffusion anormale* qui s'écrit avec un laplacien fractionnaire.
Numériquement, un problème apparaît souvent : le paramètre de raideur ε et le pas de temps sont liés. Ainsi, pour de petits ε, l'obtention d'une solution numérique de l'équation cinétique raide demande du temps de calcul (et un phénomène de diffusion numérique surgit). Pour se débarrasser de ces difficultés, on recourt aux schémas multi-échelles : Si f^ε est solution du problème P^ε qui dépend de ε (dans notre cas, il s'agit de l'équation cinétique) et si on suppose que f^ε converge vers la solution f^0 d'un problème limite P^0 (l'équation de diffusion anormale) quand ε tend vers 0, alors un schéma AP (AP pour *Asymptotic Preserving*) permet la résolution numérique du problème P^ε pour tous les ε autorisés, sans condition reliant les paramètres de discrétisation et ε.
Dans le cas de l'équation cinétique avec la limite de diffusion fractionnaire, le caractère non-local de l'équation limite et la complexité des méthodes utilisées pour obtenir la limite de diffusion anormale - même formellement- entraînent des difficultés pour la résolution numérique du problème. Ainsi, il semble que les approches usuelles doivent être adaptées à cette analyse.

3 Schémas volumes finis préservant la limite bas Mach pour le système d'Euler

Orateur : Marie-Hélène Vignal
Résumé : Ce travail est réalisé en collaboration avec R. Loubère (Institut de Mathématiques de Toulouse, CNRS, France) et G. Dimarco (Université de Ferrara, Italie).
Je m'intéresse aux schémas dits asymptotiquement préservant. Ces schémas sont connus pour être particulièrement bien adaptés pour résoudre des problèmes multi-échelles dans lesquels plusieurs régimes sont présents.
Je présenterai le cas particulier de la limite bas-Mach pour le système d'Euler utilisé en dynamique des gaz. Le nombre de Mach est le rapport de l'énergie cinétique et de l'énergie thermique du milieu. Lorsque ce rapport tend vers 0, les ondes de pression deviennent très rapides et le milieu se comporte de manière incompressible.
Lorsqu'un schéma explicite standard de type volume finis est utilisé, son pas de temps est contraint de satisfaire la condition de type CFL (Courant-Friedrichs-Lewy), ce qui dans le régime bas-Mach conduit à des pas de temps inversement proportionnels à la vitesse des ondes de pression qui est très grande. Ainsi, les schémas explicites souffrent d'une contrainte numérique sévère. De plus, ces schémas là ne sont pas consistants dans la limite bas-Mach. Ce qui signifie qu'ils ne captent pas le régime incompressible limite. Il est donc nécessaire de développer de nouveaux schémas afin de dépasser ces limitations. Ces schémas doivent être stables et consistants dans tous les régimes : faibles nombres de Mach ou nombres de Mach d'ordre 1.
Je montrerai comment construire un tel schéma pour le système d'Euler et je présenterai des résultats numériques montrant le bon comportement de ces schémas dans tous les régimes.

4 Méthodes numériques d'homogénéisation pour des EDP multi-échelles quasi-linéaires

Orateur : Gilles Vilmart
Résumé : On considère deux classes de d'EDP quasi-linéaires dont les coefficients oscillent rapidement en espace. Nous étudions la "finite element heterogeneous multiscale method" (FE-HMM) qui est une méthode d'homogénéisation reposant sur un couplage de méthodes d'éléments finis aux échelles macroscopique et microscopique.
Nous étudions d'abord des problèmes elliptiques non-linéaires de type non-monotone où les problèmes à l'échelle microscopique sont linéaires, et prouvons les vitesses optimales de convergence (normes H^1 et L^2).
Nous nous concentrons ensuite sur une classe de problèmes paraboliques non-linéaires de type monotone, où les problèmes microscopiques sont désormais non-linéaires. Nous introduisons dans ce second cas un nouveau schéma linéarisé permettant d'éviter des itérations non-linéaires souvent coûteuses, tout en prouvant à nouveau des vitesses optimales de convergence. L'efficacité de l'approche est illustrée numériquement en 2D et 3D.
Ces travaux ont été effectués en collaboration avec Assyr Abdulle, Bai Yun, et Martin Huber (EPF Lausanne).

Références

[1] A. Mellet, S. Mischler, C. Mouhot, *Fractionnal diffusion limit for collisional kinetic equations*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol 199 no.2, 2011.

[2] N. Ben Abdallah, A. Mellet, M. Puel, *Fractional diffusion limit for collisional kinetic equations : a Hilbert expansion approach.* Kinetic and Related Models, volume 4, issue 4, 2011.