Mini-symposium MLMC
Multi–Level Monte Carlo

Résumé

Dans de nombreux problèmes, l'utilisation des méthodes de Monte–Carlo est couplée à des techniques de simulation pour les processus stochastiques comme le schéma d'Euler. Typiquement, le schéma d'Euler à M pas de temps converge faiblement à la vitesse M alors que la méthode de Monte Carlo à N tirages converge à la vitesse $\sqrt{N}$. Il est donc naturel de choisir N de l'ordre de M^2. Le coût complet de l'algorithme convergeant à la vitesse M est alors de l'ordre de M^3. L'erreur globale peut se décomposer en une erreur de discrétisation et une erreur statistique qui ont chacune fait l'objet de nombreuses études menant à des algorithmes basés sur le couplage de schémas de discrétisation avec des pas différents pour équilibrer au mieux les deux erreurs. Par exemple, [1] propose une approche avec une erreur globale d'ordre $N^{5/2}$ qui combine deux schémas d'Euler selon le principe de la méthode de Romberg. Ce travail a par la suite été étendu par [2] en combinant des schémas d'Euler utilisant une suite géométrique de pas de temps : cette approche, communément appelée Multilevel Monte Carlo, a ensuite été déclinée en de nombreuses variantes.

Organisateur(s)

1. **Jérôme Lelong**, LJK, Université de Grenoble Alpes.

Liste des orateurs

1. **Vincent Lemaire**, LPMA, Université Paris 6
   Titre : Estimateur "Multilevel Richardson–Romberg".
2. **Ahmed Kebaier**, LAGA, Université Paris 13
   Titre : Multilevel Monte Carlo et fonction d'importance.
3. **Anis Al–Gerbi**, CERMICS, Ecole des Ponts
   Titre : Utilisation du schéma de Ninomiya et Victoir dans la méthode Multilevel Monte Carlo.
4. **Plamen Turkedjev**, CMAP, Ecole Polytechnique et FiME
   Titre : Approximation Multilevel pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades.

Références

[1] A. Kebaier, *Statistical Romberg extrapolation : a new variance reduction method and applications to option pricing*, Ann. Appl. Probab., 15(4), 2005, 2681–2705.

[2] M. Giles, *Multilevel Monte Carlo Path Simulation*, Operational Research, 56, 2008, 607–617.

[3] P. Wesseling, *An introduction to multigrid methods*, Pure and applied mathematics. John Wiley & Sons Australia, Limited, 1992.

Jérôme Lelong, Laboratoire Jean Kuntzmann, Tour IRMA, 51 rue des mathématiques, 38041 Grenoble Cédex 9, `jerome.lelong@imag.fr`

Introduction

Considérons le problème du calcul de $\mathbb{E}[f(X_T)]$ par une méthode de Monte Carlo où X est solution d'une équation différentielle stochastique. Classiquement, on approche cette quantité par

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(X_T^{i,M})$$

où X_T^M est la valeur terminale du schéma d'Euler à M pas de temps et les $X_T^{i,M}$ sont i.i.d selon la loi de X_T^M. Si le schéma d'Euler de X converge faiblement en $1/M$, alors il est optimal de choisir $N = M^2$. Pour atteindre une précision ε fixée, le coût total de la méthode s'élève alors à ε^{-3}. La méthode multilevel Monte Carlo a pour objectif de réduire ce coût en écrivant

$$\mathbb{E}\left[f(X_T^L)\right] = \mathbb{E}\left[f(X_T^0)\right] + \sum_{\ell=1}^{L} \mathbb{E}\left[f(X_T^\ell) - f(X_T^{\ell-1})\right].$$

Chacune des espérances du membre de droite de l'équation précédente est ensuite estimée par une méthode de Monte Carlo. Giles a montré dans [3] qu'en choisissant judicieusement le nombre de pas de discrétisation et le nombre de tirages Monte Carlo dans les différents niveaux, la complexité totale pouvait être ramenée à $\varepsilon^{-2}(\log\varepsilon)^2$.
Dans ce mini–symposium, nous présenterons plusieurs extensions et applications de ce principe multi–niveau.

1 Estimateur "Multilevel Richardson-Romberg"

La méthode Multilevel Monte Carlo a été introduite pour diminuer la complexité dans des problèmes biaisés (par exemple avec erreur de discrétisation). Dans les cas usuels de problèmes biaisés, la complexité dans une méthode de Monte Carlo est de ε^{-3} pour une erreur quadratique fixée de ε. Avec l'estimateur Multilevel, la complexité est diminuée à $\varepsilon^{-2}\log(1/\varepsilon)^2$.
Dans ce travail en collaboration avec Gilles Pagès, nous introduisons un nouvel estimateur qui combine l'approche Multilevel et des extrapolations de Richardson–Romberg qui permettent de réduire fortement le biais. Nous prouvons que la complexité est alors diminuée à $\varepsilon^{-2}\log(1/\varepsilon)$ pour une erreur quadratique fixée de ε (dans les cas standards).
Nous illustrerons l'efficacité et la robustesse numérique de la méthode sur différents exemples issus du monde de la finance et de l'assurance.

2 Multilevel Monte Carlo et fonction d'importance

Les nombreuses études menées au cours de ces dernières années sur les méthodes de multilevel Monte Carlo ont confirmé la supériorité de ces nouvelles techniques par rapport aux méthodes de Monte Carlo classiques. L'efficacité du multilevel Monte Carlo peut encore être améliorée en le couplant à des techniques de fonction d'importance. Ben Alaya, Hajji et Kebaier [1] ont proposé dans ce cadre d'utiliser des méthodes d'approximation stochastique pour déterminer la fonction d'importance optimale. Jourdain et Lelong ont récemment montré que les méthodes de type *Sample Average approximation* permettaient de déterminer la meilleure fonction d'importance dans le cadre gaussien de manière plus robuste et automatique que l'approximation stochastique. Dans ce travail, nous étudions une adaptation originale de cette approche au multilevel Monte Carlo. Nous proposons une méthode de multilevel Monte Carlo adaptative qui se base sur des techniques d'optimisation déterministes pour déterminer le paramètre d'importance sampling optimal. Ce nouvel estimateur permet de réduire la variance de manière robuste. Dans le cadre de la discrétisation de diffusions, nous démontrons une loi forte des grands nombres et un théorème de la limite centrale pour notre estimateur. Nous illustrons l'efficacité de notre méthode sur des applications en lien avec la finance quantitative.

3 Approximation multilevel pour les équations différentielles stochastiques rétrogrades

Nous proposons une approche de type multilevel Monte Carlo pour approcher la solution d'équations différentielles stochastiques. Notre algorithme se base sur la construction d'une suite de variables de contrôle martingales définies sur des grilles de discrétisation en temps emboitées. Cette approche permet de réduire l'erreur d'approximation statistique de manière adaptative et générique. Nous menons une analyse de l'erreur de notre approche dont nous fournissons des estimées explicites et non asymptotiques. Nous montrons que l'approche multilevel permet de réduire le coût de calcul pour atteindre une précision donnée ε. Les bornes d'erreur théoriques permettent de garantir un gain d'un ordre (en ε^{-1}) par rapport aux méthodes classiques. Notre étude théorique est corroborée par des exemples numériques qui mettent en avant l'efficacité de la méthode sur des cas pratiques.

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Dirk Becherer (Humboldt Universität zu Berlin).

4 Utilisation du schéma de Ninomiya et Victoir dans la méthode Multilevel Monte Carlo

L'objectif de la méthode Multilevel Monte Carlo, introduite par Giles [3], est de réduire la complexité de l'estimation de l'espérance $\mathbb{E}\left[f\left(X_T\right)\right]$, où X est solution d'une équation différentielle stochastique multidimensionnelle, f une fonction de payoff régulière et T un temps terminal, sous contrainte de précision, notée ϵ. La précision de l'estimateur est mesurée par son erreur quadratique. L'estimateur Multilevel Monte Carlo consiste à discrétiser l'équation différentielle stochastique à l'aide d'un schéma numérique X^l et à combiner plusieurs grilles de discrétisation. En écrivant :

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_T^L\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_T^0\right)\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathbb{E}\left[f\left(X_T^l\right) - f\left(X_T^{l-1}\right)\right]$$

l'estimateur Multilevel Monte Carlo est donné par l'estimation du membre de droite dans l'égalité précédente, c'est-à-dire :

$$\hat{Y}_{MLMC} = \sum_{l=0}^{L} \frac{1}{M_l} \sum_{k=1}^{M_l} Z_k^l$$

où les variables aléatoires $\left(Z_k^l\right)_{0\leq l\leq L, 1\leq k\leq M_l}$ sont indépendantes et vérifient :

$$\forall k \in \{1, \ldots, M_0\}, \mathbb{E}\left[Z_k^0\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_T^0\right)\right]$$

et :

$$\forall l \in \{1, \ldots, L\}, \forall k \in \{1, \ldots, M_l\}, \mathbb{E}\left[Z_k^l\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_T^l\right) - f\left(X_T^{l-1}\right)\right]$$

Le choix du niveau de discrétisation le plus fin, noté L, est dirigé par le biais du schéma numérique. Le nombre de tirages pour chaque niveau de discrétisation, noté M_l, est une fonction croissante des variances des variables aléatoires Z_k^l. En outre, les quantités M_l sont choisies afin de minimiser le temps de calcul, pour une précision fixée. Pour le choix naturel :

$$Z_k^l = f\left(X_T^l\right) - f\left(X_T^{l-1}\right)$$

où les deux schémas sont dirigés par le même mouvement brownien, la variance de Z_k^l est reliée à l'erreur forte du schéma. Pour un schéma d'ordre fort $\frac{1}{2}$, dans le cas d'un schéma d'Euler par exemple, nous avons une complexité en $O\left(\epsilon^{-2}\left(\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)^2\right)$. En revanche, pour un schéma d'ordre fort strictement supérieur à $\frac{1}{2}$ nous avons une complexité en $O\left(\epsilon^{-2}\right)$.
En vue d'utiliser, dans la méthode Multilevel Monte Carlo, le schéma d'ordre faible 2, proposé par Ninomiya et Victoir [4], nous avons donc analysé l'erreur forte de ce schéma.
Giles et Szpruch [5] ont récemment proposé un schéma numérique ainsi qu'un couplage dit antithétique avec :

$$Z_k^l = \frac{1}{2}\left(f\left(X_T^{l,k}\right) f\left(\tilde{X}_T^{l,k}\right)\right) - f\left(X_T^{l-1,k}\right)$$

dans lequel $\tilde{X}_T^{l,k}$ est obtenu à l'aide du même schéma numérique que pour $X_T^{l,k}$, mais en transposant les paires d'accroissements brownien successifs. Cela permet à la variance de décroitre à l'ordre 2 et ainsi d'attendre la complexité $O\left(\epsilon^{-2}\right)$. Afin d'adapter cette méthode antithétique, nous proposons un couplage à l'ordre fort 1 entre les schémas de Giles–Szpruch et le schéma de Ninomiya–Victoir. Enfin, nous présentons une version améliorée de la méthode de Monte Carlo antithétique qui utilise le couplage précédent, permettant de garder la complexité $O\left(\epsilon^{-2}\right)$ et de profiter de l'erreur faible d'ordre 2 du schéma de Ninomiya–Victoir.

Références

[1] M. Ben Alaya, A. Kebaier et K. Hajji, *Importance Sampling and Statistical Romberg method*, Bernoulli, 2015, à paraître.

[2] B. Jourdain et J. Lelong, *Robust Adaptive Importance Sampling for Normal Random Vectors*, The Annals of Applied Probability, 19(5), 2009, 1687–1718.

[3] M. Giles, *Multilevel Monte Carlo Path Simulation*, Operational Research, 56, 2008, 607–617.

[4] S. Ninomiya et N .Victoir, *Weak approximation of stochastic differential equations and application to derivative pricing*, Applied Mathematical Finance, 15(2), 2008, 107–121.

[5] M. Giles et L. Szpruch, *Antithetic multilevel monte carlo estimation for multi-dimensional sdes without Lévy area simulation*, The Annals of Applied Probability, 24(4), 2014, 1585–1620.