

Mini-symposium ProbAnEDP
***Temps long pour des EDP non linéaires ou dégénérées :
probabilités et analyse***

Mini-symposium porté par l'ANR STAB

Résumé

L'étude du comportement en temps long d'EDP non linéaires, de type Boltzmann, Landau ou Vlasov-Fokker-Planck ou dégénérées comme Fokker-Planck cinétique, a explosé ces dernières années. Ceci est le fruit d'une interaction de plus en plus importante entre Probabilités, Analyse et Inégalités Fonctionnelles. L'utilisation, par exemple, de technique semi-groupe à la Bakry-Emery, l'introduction de systèmes de particules stochastiques, la propagation du chaos ont permis d'obtenir des résultats frappants sur Boltzmann-Landau ou Kac. Ce mini-symposium a pour but de mettre en évidence différents aspects de ces résultats sur l'équation Landau, Vlasov-Fokker-Planck, les lois de conservation ou bien du recuit simulé cinétique .

Organisateur(s)

1. **Arnaud Guillin**, Université Blaise Pascal et IUF.

Liste des orateurs

1. **François Bolley**, Université Paris 6
Titre : Stabilité des solutions de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck.
2. **Pierre Monmarché**, Institut de Mathématiques de Toulouse
Titre : Recuit simulé cinétique.
3. **Kleber Carrapatoso**, ENS Cachan
Titre : Sur la convergence vers l'équilibre pour l'équation de Landau spatialement homogène avec potentiel coulombien.
4. **Julien Reygner**, Ens Lyon
Titre : L'énergie libre des lois de conservation.

Arnaud Guillin, IUF et Laboratoire de Mathématiques, Université Blaise Pascal, 63177 Aubière, guillin@math.univ-bpclermont.fr

François Bolley, Laboratoire de probabilités et modèles aléatoires. Umr Cnrs 7599. Université Pierre et Marie Curie. 4 place Jussieu. 75005 Paris, francois.bolley@upmc.fr

Pierre Monmarché, Institut de Mathématiques de Toulouse, 118, route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, pierre.monmarche@math.univ-toulouse.fr

Kleber Carrapatoso, École Normale Supérieure de Cachan, CMLA (UMR 8536), 61 av. du président Wilson, 94235 Cachan cedex, France, carrapatoso@cmla.ens-cachan.fr

Julien Reygner, UMPA, ENS Lyon, julien.reygner@ens-lyon.fr

1 Stabilité des solutions de l'équation de Vlasov-Fokker-Planck

L'équation de Vlasov-Fokker-Planck décrit l'évolution, dans l'espace des phases, d'un grand système de particules diffusives en interaction. Sous certaines hypothèses de coercivité sur les forces extérieures (de friction, de confinement) et d'interaction, on peut préciser et quantifier la stabilité des solutions et leur comportement en temps long. On présentera des résultats classiques et plus récents sur ce sujet, fondés sur des méthodes de couplage et de dissipation d'entropie.

2 Recuit simulé cinétique

Le recuit simulé est un algorithme d'optimisation stochastique utilisé pour des problèmes multi-modaux en grande dimension. Il repose sur l'approximation par la densité d'un processus markovien en temps long d'une mesure de Gibbs, dont la température ε_t est paramétrée par l'utilisateur au cours du temps. Plusieurs dynamiques markoviennes sont possibles. Le cas le mieux connu, dans la théorie, est la diffusion réversible de Fokker-Planck dont la densité f_t satisfait

$$\partial_t f_t = \varepsilon_t \Delta f_t - \nabla U \cdot \nabla f_t.$$

Néanmoins en pratique, pour explorer l'espace plus efficacement, il est intéressant (cf. [1]) d'utiliser une dynamique cinétique, dotée d'inertie, comme la diffusion cinétique de Langevin

$$\partial_t f_t = y \cdot \nabla_x f_t - \left(\nabla_x U + \frac{y}{\varepsilon_t} \right) \cdot \nabla_y f_t + \Delta_y f_t.$$

Un autre candidat cinétique est un billard stochastique (ou *run and tumble process*), dont les trajectoires sont des lignes brisées déterministes par morceaux, ce qui permet une implémentation peu coûteuse. On verra que les méthodes récentes (dites hypocercives) développées pour quantifier la convergence à l'équilibre (à température fixée) permettent d'adapter les résultats classiques du cas réversible aux cas cinétiques (cf. [2, 3]).

3 Sur la convergence vers l'équilibre pour l'équation de Landau spatialement homogène avec potentiel coulombien

L'équation de Landau est un modèle fondamentale en théorie cinétique qui décrit l'évolution en temps d'un plasma. Une propriété très importante de cet équation est l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov (appelé entropie), ce qui nous indique que les solutions convergent vers l'équilibre associé (distribution gaussienne de même masse, quantité de mouvement et énergie que la donnée initiale) lorsque $t \rightarrow \infty$. Je présenterai des nouveaux résultats, dans le cas spatialement homogène avec potentiel coulombien, qui montrent cette convergence et donnent des taux quantitatifs. Ceci est basé sur deux méthodes différentes : la première est basée sur des inégalités fonctionnelles pour la dissipation d'entropie ; la deuxième sur des estimations de croissance du semi-groupe associé à l'équation linéarisée.

4 L'énergie libre des lois de conservation

Cet exposé est consacré au comportement en temps long de la solution de loi de conservation scalaire

$$\partial_t u = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} u - \partial_x (B(u)) \tag{1}$$

posée sur la droite réelle. Lorsque la condition initiale $u(0, \cdot)$ est la fonction de répartition d'une mesure de probabilité, la dérivée $\partial_x u$ vérifie une équation de Fokker-Planck non-linéaire. Nous proposons d'écrire cette équation sous la forme du flot de gradient, dans l'espace de Wasserstein, d'une fonctionnelle qui s'identifie à une énergie libre. Le comportement en temps long de u est alors directement relié à la convexité de cette fonctionnelle, dont nous discuterons quelques aspects.

Références

- [1] CAFFAREL, LELIÈVRE, SCEMAMA & STOLTZ, *An efficient sampling algorithm for Variational Monte Carlo*, Journal of Chemical Physics, 2006.
- [2] MONMARCHÉ, *Hypocoercive relaxation to equilibrium for some kinetic models*, Kinetic and Related Models, 2014.
- [3] MONMARCHÉ, *Hypocoercivity in metastable settings and kinetic simulated annealing*, ArXiv e-prints, 2015.