

Optimal design du domaine de contrôle pour l'équation des ondes (Travail en cours)

Yannick PRIVAT

CNRS, ENS Cachan Bretagne, Univ. Rennes 1

mai 2011



Introduction (1)

Ω désigne le domaine occupé par une membrane élastique fixée à son support.

$$(1) \begin{cases} y_{tt} - \Delta y = h_\omega & (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\ y(t, x) = 0 & t \in [0, T], x \in \partial\Omega \\ y(0, x) = y^0(x), \partial_t y(0, x) = y^1(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

h_ω = terme de feedback limité à un sous domaine $\omega \subset \Omega$.

Utilité du feedback h_ω

Stabiliser en temps T fini (ou non) l'équation des ondes, i.e.

$$y(T, x) = \partial_t y(T, x) = 0, x \in \Omega.$$

ou

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \partial_t y(t, x) = 0, x \in \Omega.$$

Introduction (2)

Objectif de cet exposé

Choisir ω de façon à minimiser une certaine fonctionnelle coût $J(\chi_\omega)$.
 χ_ω = fonction caractéristique du domaine ω .

Quelques choix de h_ω possibles

- Cas n°1. $T = +\infty$.

$$h_\omega = -k\chi_\omega \frac{\partial y}{\partial t}.$$

- Cas n°2. $T < +\infty$.

h_ω = contrôle donné par la méthode d'unicité de Hilbert (HUM).

Outlines of the talk

- 1 Introduction
- 2 Résolution des problèmes d'optimal design pour la méthode HUM
- 3 Conclusion et perspectives

Problème d'optimal design : Optimisation de la norme L^2 du contrôle HUM

Supposons que, à $\omega \subset \Omega$ fixé, on dispose d'un contrôle h_ω assurant

$$y(T, x) = \partial_t y(T, x) = 0, x \in \Omega.$$

On recherche le positionnement optimal du domaine de contrôle ω .

$$\text{optimal} \Leftrightarrow \min_{\omega} \|h_\omega\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))}$$

Plus précisément :

Un second problème d'optimal design

$$\begin{cases} \min J(\chi_\omega) = \|h_\omega\|_{L^2(0, T; L^2(\omega))} \\ \chi_\omega \in \mathcal{A}_\Lambda := \{a \in L^\infty(\Omega, \{0, 1\}), \int_\Omega a(x) dx = \Lambda\}. \end{cases}$$

Problème d'optimal design pour le contrôle HUM

La méthode HUM (1)

- Rappel : équation des ondes 1-D avec feedback.

$$\begin{cases} y_{tt} - \Delta y = h_\omega & (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\ y(t, x) = 0 & t \in [0, T], x \in \partial\Omega \\ y(0, x) = y^0(x), \partial_t y(0, x) = y^1(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

- On introduit le **système adjoint**.

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \Delta \phi = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\ \phi(t, x) = 0 & t \in [0, T], x \in \partial\Omega \\ \phi(0, x) = \phi^0(x), \partial_t \phi(0, x) = \phi^1(x) & x \in \Omega. \end{cases}$$

Problème d'optimal design pour le contrôle HUM

La méthode HUM (2)

- Supposons que (ω, T) vérifie la condition (GCC).
Alors, $(y^0, y^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est L^2 -contrôlable dans ω en temps T .
 \hookrightarrow En dimension 1, il suffit d'avoir $T \geq 2\pi$.
- Plus précisément, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall (\phi^0, \phi^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega),$$

$$\left| \langle \widetilde{\phi^1}, y^0 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \langle \widetilde{\phi^0}, y^1 \rangle_{L^2, L^2} \right| \leq C_1 \left(\int_0^T \int_{\Omega} \chi_{\omega} \phi^2 dx dt \right)^{1/2},$$

Problème d'optimal design pour le contrôle HUM

La méthode HUM (3)

- Choix du contrôle : $h_\omega = -\chi_\omega \tilde{\phi}$, où $\tilde{\phi}$ est solution du système adjoint, et

$$\operatorname{argmin}_{(\tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \mathcal{J}_{\chi_\omega}(\tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^1)$$

avec

$$\mathcal{J}_{\chi_\omega}(\tilde{\phi}^0, \tilde{\phi}^1) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \chi_\omega \tilde{\phi}^2 dx dt + \langle \tilde{\phi}^1, y^0 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - \langle \tilde{\phi}^0, y^1 \rangle_{L^2, L^2}.$$

Problème d'optimal design : minimisation de la norme L^2 du contrôle par rapport à $\omega \subset \Omega$

$$\left\{ \begin{array}{l} \inf J(\chi) = \int_0^T \int_\Omega \chi \phi^2 dx dt \\ \chi \in \mathcal{U}_L = \left\{ \chi_\omega \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}) \mid \int_\Omega \chi_\omega(x) dx = L|\Omega| \right\}. \end{array} \right.$$

Quelques remarques utiles en pratique.

$$\mathcal{A}_\Lambda := \left\{ a \in L^\infty(\Omega, \{0, 1\}), \int_\Omega a(x) dx = \Lambda \right\}$$

- On munit $L^\infty(\Omega, \{0, 1\})$ de la topologie L^∞ faible- \star .
- \mathcal{A}_Λ n'est ni convexe, ni fermée.
- On a :

$$\overline{\mathcal{A}_\Lambda} = \left\{ a \in L^\infty(\Omega, [0, 1]), \int_\Omega a(x) dx = \Lambda \right\}$$

- $\overline{\mathcal{A}_\Lambda}$ est convexe et séquentiellement compacte pour la topologie L^∞ faible- \star .
- La classe \mathcal{A}_Λ correspond aux extremales de la classe $\overline{\mathcal{A}_\Lambda}$, i.e. aux éléments a ne pouvant pas s'écrire

$$a = ta_1 + (1 - t)a_2, \quad t \in (0, 1), \quad \text{mes}\{a_1 \neq a_2\} > 0.$$

Relaxation du problème d'optimisation.

On introduit le **problème relaxé** :

$$\begin{cases} \min J(a) \\ a \in \overline{\mathcal{A}_\lambda}. \end{cases}$$

Si $a \mapsto J(a)$ est continue, puisque $\overline{\mathcal{A}_\lambda}$ est séquentiellement compacte, alors ce problème a toujours une solution.

Question intéressante

Dans quel cas ces solutions sont-elles des extrémales ?

Dans ce cas, on aura $a = \chi_\omega \dots$

Pour le savoir, on sera amené à étudier les **conditions d'optimalité** de ce problème.

Un cas simple : $T = 2\pi$, méthode HUM

Réécriture fréquentielle du critère (1)

Cas très particulier $T = 2\pi$ (ou multiple)

- On écrit

$$\phi(t, x) = \sum_{j \in \mathbf{N}^*} (A_j \cos(jt) + B_j \sin(jt)) \sin(jx),$$

- Alors, on minimise la fonctionnelle quadratique

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\chi_\omega}(\phi^0, \phi^1) = & \sum_{j=1}^{+\infty} \left[\frac{\pi}{2} (A_j^2 + B_j^2) \int_0^\pi \chi_\omega \sin^2(jx) dx \right. \\ & \left. + jB_j \langle \sin(jx), y^0 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - A_j \langle \sin(jx), y^1 \rangle_{L^2, H_0^1} \right]. \end{aligned}$$

pour trouver le contrôle HUM.

Cas $T = 2\pi$, méthode HUM

Réécriture fréquentielle du critère (2)

Cas très particulier $T = 2\pi$ (ou multiple)

- Le critère se réécrit

$$\|h_\omega\|_{L^2(0,2\pi;L^2(\omega))}^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\rho_j^2}{\int_0^\pi \chi_\omega \sin^2(jx) dx}.$$

- On est ramené au problème d'optimal design

$$(\text{Opt-HUM}) \begin{cases} \min J(\chi) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\rho_j^2}{\int_0^\pi \chi(x) \sin^2(jx) dx} \\ \chi \in \mathcal{U}_L, \end{cases}$$

Cas $T = 2\pi$, méthode HUM

Résultat principal

Théorème (YP-Trélat-Zuazua)

Soit $L \in (0, 1)$. Supposons qu'il existe deux réels strictement positifs M and δ tels que

$$\forall j \in \mathbf{N}^*, \left| \langle \sin(jx), y^1 \rangle_{L^2, L^2}^2 + \langle j \sin(jx), y^0 \rangle_{H^{-1}, H_0^1}^2 \right| \leq M e^{-\delta j}. \quad (1)$$

Alors le problème (Opt-HUM) a une solution unique a^* , qui satisfait

- ① son minimiseur est symétrique par rapport à $x = \pi/2$.
- ② il existe $x_0 \in (0, \pi)$ tel que $[0, x_0] \subset \{a^* = 0\}$.

Cas $T = 2\pi$, méthode HUM

Idée de la preuve (1)

- **Étape 1 : relaxation.**

Le problème

$$\begin{cases} \min J(a) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\rho_j^2}{\int_0^\pi a(x) \sin^2(jx) dx} \\ a \in \overline{\mathcal{U}_L}, \end{cases}$$

où $\overline{\mathcal{U}_L}$ est l'adhérence de \mathcal{U}_L pour la topologie L^∞ faible- \star , possède une solution a^* .

- **Étape 2 : conditions d'optimalité au premier ordre.**

On montre que la solution est nécessairement une extrémale.

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$A_\varepsilon = \{\varepsilon \leq a^* \leq 1 - \varepsilon\}$$

soit de mesure non nulle.

Deuxième cas : $T = 2\pi$, méthode HUM

Idée de la preuve (2)

- Étape 2 (suite) : conditions d'optimalité au premier ordre.

$$\exists \lambda \in \mathbf{R}, \langle dF(a^*), h \rangle + \lambda \int_0^\pi h(x) dx = 0,$$

avec h à support dans A_ε .

- On en déduit

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \sin^2(jx) = \lambda \text{ sur } A_\varepsilon.$$

Remarque : ça n'est pas immédiat car rien ne dit que l'optimum est une réunion d'ouverts...

Deuxième cas : $T = 2\pi$, méthode HUM

Idée de la preuve (3)

- Étape 2 (fin) : si (1) est vraie, alors a^* est extrémale.

L'application

$$z \mapsto \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j \sin^2(jz) - \lambda$$

est analytique dans $\{-\delta < \Im m(z) < \delta\}$ sous l'hypothèse (1)
(décroissance exponentielle des coefficients de Fourier)

- Cela implique $\alpha_j = 0$ pour tout j .
- C'est absurde !

Deuxième cas : $T = 2\pi$, méthode HUM

Cas d'un nombre fini de modes

$$J(a) = \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j^2}{\int_0^\pi a(x) \sin^2(jx) dx}$$

Proposition

Dans ce cas, l'optimum est une réunion finie d'intervalles.

En effet,

- La condition d'optimalité devient

$$\text{on } \{a^* = 1\}, \quad \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j^2 \sin^2(jx)}{\left(\int_0^\pi a^*(x) \sin^2(jx) dx\right)^2} - \lambda \geq 0,$$

$$\text{on } \{a^* = 0\}, \quad \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j^2 \sin^2(jx)}{\left(\int_0^\pi a^*(x) \sin^2(jx) dx\right)^2} - \lambda \leq 0.$$

Deuxième cas : $T = 2\pi$, méthode HUM

Cas d'un nombre fini de modes

- Les points de switch vérifient donc

$$\sum_{j=1}^N \frac{\rho_j^2}{\left(\int_0^\pi a^*(x) \sin^2(jx) dx\right)^2} \sin^2(jx) = \text{constante.}$$

- Cette équation se réécrit

$$\sum_{j=1}^N \gamma_j \sin^2(jx) = \text{constant,}$$

d'où le résultat.

Résultats numériques dans le cas d'un nombre fini de modes

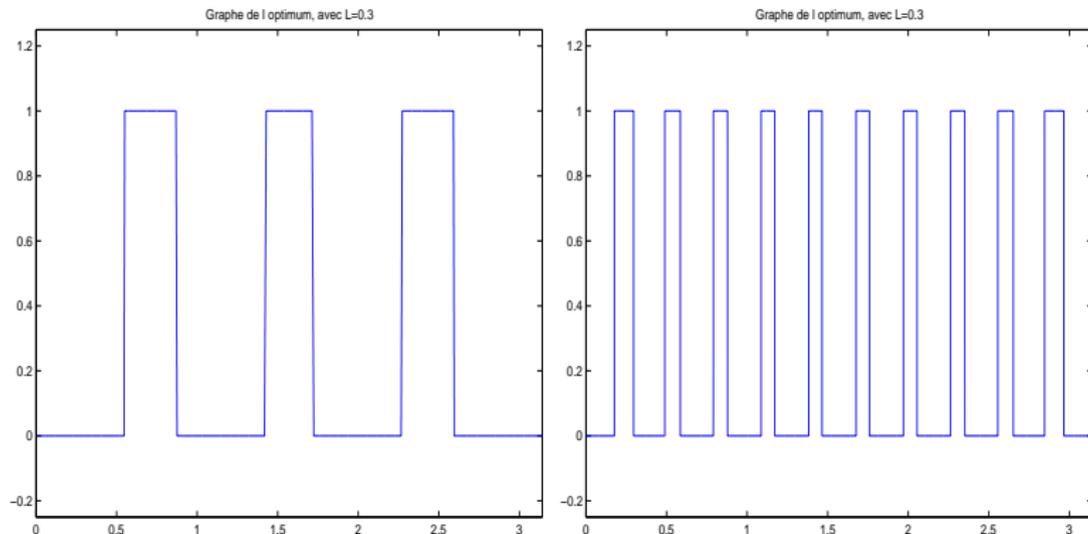


FIGURE: Illustration de la minimisation de J_n pour $n \in \{3, 10\}$, avec pour données initiales $\rho = \text{ones}(1, n)$

Résultats numériques dans le cas de deux modes,

$$J(t) = \frac{t}{\int_{\omega} \sin^2 x dx} + \frac{1-t}{\int_{\omega} \sin^2(2x) dx}$$

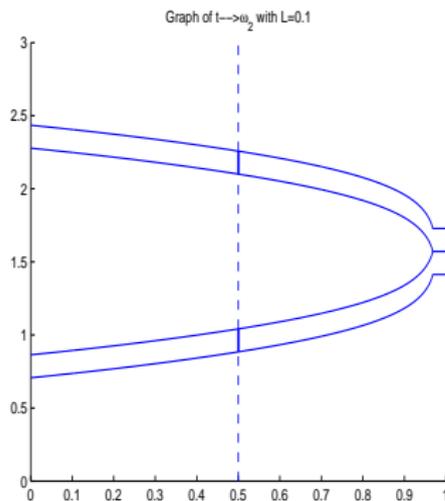
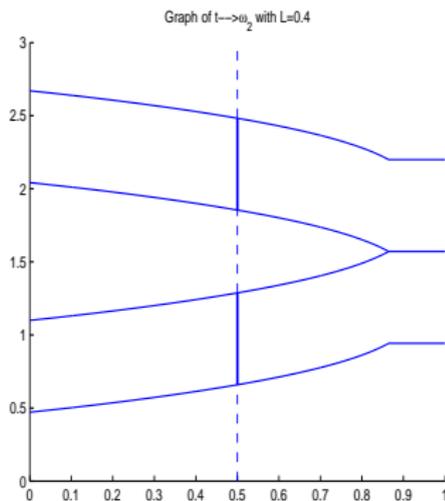


FIGURE: Optimum en fonction de t , la contrainte $\text{mes}(\omega) = \pi L$ est fixée

L'optimum est-il fonction caractéristique d'un mesurable ?

Caractérisation des phénomènes de relaxation

On définit :

- $\mathcal{A}(0, \pi)$ = ensemble des fonctions φ dans $L^1(0, \pi)$ admettant le développement en série de Fourier

$$\varphi(x) = p_0 + \sum_{j=1}^{+\infty} p_j \cos(2jx),$$

avec $p_0 \in \mathbb{R}$ et $(p_j)_{j \geq 0} \in \ell^1(\mathbb{R})$.

Théorème (YP-Trélat-Zuazua)

Il existe une correspondance bi-univoque entre l'ensemble des fonctions de $\mathcal{A}(0, \pi)$ s'annulant sur un sous-ensemble de $[0, \pi]$ de mesure strictement positive et l'ensemble des données de l'équation des ondes pour lesquelles on observe un phénomène de relaxation.

↪ Procédé constructif de contre-exemples.

Optimisation uniforme par rapport aux données initiales

On définit l'opérateur HUM :

$$\begin{aligned} \Gamma_\omega : H_0^1(0, \pi) \times L^2(0, \pi) &\rightarrow L^2((0, T) \times (0, \pi)) \\ (y^0, y^1) &\mapsto h_\omega. \end{aligned}$$

On s'intéresse au problème d'optimal design :

$$\begin{cases} \min W(\chi) = \|\Gamma_\omega\|_{L^2((0, T) \times (0, \pi))} \\ \chi \in \mathcal{U}_L, \end{cases}$$

On montre que :

$$W(\chi_\omega) = \left(\inf_{j \in \mathbb{N}^*} \chi_\omega(x) \sin^2(jx) dx \right)^{-1}.$$

↔ On se ramène donc à Hébrard-Henrot.

Et si T n'est plus un multiple de 2π ?

Le problème se réécrit :

$$\begin{cases} \min J(\chi) = \int_0^T \int_{\omega} \phi^2(t, x) dx dt, \\ \chi \in \mathcal{U}_L, \end{cases}$$

et ϕ est l'unique minimiseur de la fonctionnelle HUM, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\chi_{\omega}}(\phi^0, \phi^1) = & \left[\int_0^T \int_0^{\pi} \chi_{\omega} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} (A_j \cos(jt) + B_j \sin(jt)) \sin(jx) \right)^2 dx dt \right. \\ & \left. + jB_j \langle \sin(jx), y^0 \rangle_{H^{-1}, H_0^1} - A_j \langle \sin(jx), y^1 \rangle_{L^2, H_0^1} \right], \end{aligned}$$

$$\text{où } \phi(x, t) = \sum_{j=1}^{+\infty} (A_j \cos(jt) + B_j \sin(jt)) \sin(jx).$$

↪ On obtient les mêmes résultats que dans le cas diagonal !

Perspectives proches

- **Hébrard-Henrot** : cas de l'optimisation de l'abscisse spectrale \mathcal{A} ?
Peut-on résoudre

$$\max_{\chi \in \mathcal{U}_L} \sup \{ \Re(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A}(\chi)) \} ?$$

- Généralisation de la méthode de contrôle optimal HUM à l'équation de la chaleur ? Peut-on étendre notre approche ?
- Bien évidemment, quid de l'extension au multi-D ?
- Aspects numériques. (Hébrard-Henrot : spillover phenomenon. . .)
- **Développement et perfectionnement des méthodes numériques.**
(comparaison avec les travaux numériques d'A. Münch)
- Comment mettre numériquement en évidence des phénomènes de relaxation ?

Thank you for your attention