Reconstruction de la forme de défauts dans un milieu inhomogène par mesures acoustiques en champ lointain

Yann Grisel[1,2], Pierre Mazet[1,2], Vincent Mouysset[1], Jean-Pierre Raymond[2]

[1] ONERA - Toulouse
[2] Université Toulouse 3, Paul Sabatier

ONERA
THE FRENCH AEROSPACE LAB

retour sur innovation

Présentation du problème

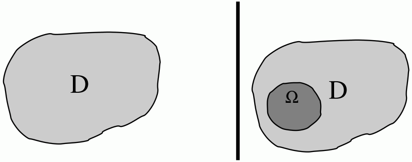


Fig.: Objet dans son état initial (à gauche) et après apparition d'un défaut (à droite).

Problème

- Récupérer des informations sur d'éventuels défauts dans une structure connue à partir de mesures à grande distance.

Objectif

- Etablir une méthode rapide de reconstruction de la localisation et de la forme des défauts à partir des mesures.

Modélisation mathématique

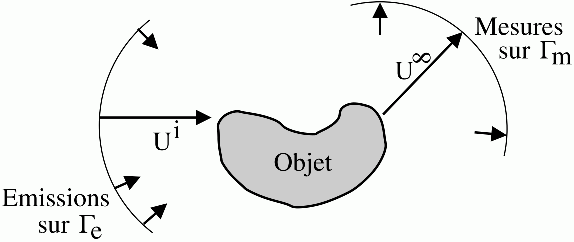


Fig.: La diffraction acoustique : champs incidents et champ lointain.

- Système de Helmholtz dans un milieu inhomogène

$$\begin{cases} \Delta u_n + k^2 n(x) u_n = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^d, \\ \Delta u^i + k^2 u^i = 0, \\ u_n = u^s + u^i, \\ \lim_{r\to\infty} r^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r u^s - iku^s) = 0. \end{cases}$$

$$\mathrm{support}(n-1) = D$$

- Solution fondamentale

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n(x))\Phi_n(z,x) = -\delta(z,x), \\ \text{Condition de radiation de Sommerfeld} \end{cases}$$

- Résolvante :

$$V_n h(x) := \langle h, \overline{\Phi_n(\cdot, x)} \rangle_{L^2(D)}.$$

- Comportement asymptotique (champ lointain)

$$u_n(x) = u^i(x) + \gamma \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}} u_n^\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) + o\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right),$$

- Ondes planes et fonctions de Herglotz

$$u^i(\theta, x) = e^{ik\theta \cdot z}, \ \theta \in \Gamma_e, \ x \in \mathbb{R}^d,$$

$$Hg(x) = \langle g, \overline{u^i(\cdot, x)} \rangle_{L^2(\Gamma_m)}.$$

- Opérateur de mesures (de champ lointain)

$$F_n g(\hat{x}) = \langle g, \overline{u_n^\infty(\hat{x}, \cdot)} \rangle_{L^2(\Gamma_e)}, \ \hat{x} \in \Gamma_m.$$

Localisation de défauts

Les défauts

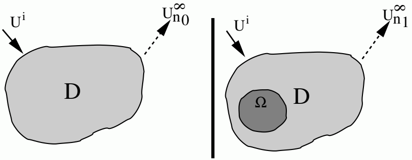


Fig.: Objet et mesures avant (à gauche) et après (à droite) apprition de défauts.

- Indice initial : n_0
- Indice perturbé : n_1
- Opérateur de mesures : $\Delta_F = F_{n_1} - F_{n_0}$

Objectif : reconstruire la forme du domaine $\Omega := \mathrm{support}(n_1 - n_0)$ à partir des mesures regroupées dans l'opérateur Δ_F

Méthodes de reconstruction de la forme de défauts

Théorème (Reconstruction de la forme des défauts par le critère de Picard)

Hormis pour certaines valeurs de k, avec des indices n_0 et n_1 à valeurs réelles et des directions d'émission/réception couvrant toute la sphère unité, alors $\forall z \in \mathbb{R}^d$ on a

$$z \in \Omega \iff 0 < \mathfrak{P}_{\{n_0, n_1\}}(z) := \left(\sum_j \frac{\left| \langle \overline{u_{n_0}(\cdot, z)},\ \Psi_j \rangle \right|^2}{\lambda_j} \right)^{-1},$$

où λ_j / Ψ_j sont les valeurs/fonctions propres d'un opérateur W

Théorème (Reconstruction de la forme des défauts par minimisation)

Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on a aussi

$$z \in \Omega \iff 0 < \mathfrak{M}_{\{n_0, n_1\}}(z) := \left\| W^{\ddagger} \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\|^{-2},$$

où $W^{\ddagger}$ est un pseudo-inverse de $W^{\frac{1}{2}}$.

1 - Caractérisation par les sources ponctuelles

1. Si $z \in \Omega$, avec f_z un lissage de $\Phi_{n_0}(z,x)$ autour de z, alors
$$\Phi_{n_0}^{\infty}(z,\hat{x}) = f_z^{\infty} = V_{n_0}^{\infty}\left[\chi_\Omega(\Delta + k^2 n_0) f_z\right].$$
Si $z \notin \Omega$, $V_{n_0}\chi_\Omega u^i$ est continue hors de Ω et $\Phi_{n_0}(z,\cdot)$ est singulière.
Conclusion :
$$z \in \Omega \iff \Phi_{n_0}^{\infty}(z,\cdot) \in \mathcal{R}\left(V_{n_0}^{\infty}\chi_\Omega\right).$$
2. Par l'asymptotique de l'équation de Lippmann-Schwinger
$$(V_n g)^{\infty} = V_1^{\infty}\left(g + k^2(n-1)V_n g\right),$$
on a la relation de réciprocité mixte
$$\Phi_n^{\infty}(z,\hat{x}) = \gamma u_n(-\hat{x},z).$$
3. Ainsi, avec l'opérateur $C : L^2(D) \to L^2(\Gamma_e)$, défini par
$$Cf(\hat{x}) = \langle f, u_{n_0}(\hat{x},\cdot)\rangle_{L^2(D)},$$
pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ on a
$$\boxed{z \in \Omega \iff \overline{u_{n_0}(\cdot,z)} \in \mathcal{R}\left(C\chi_\Omega\right).}$$

2 - Caractérisation Caractérisation de l'image d'un opérateur [Nachman, 2007]

1. Pour un opérateur linéaire continu L, si

$$\exists c > 0 / \; \forall \Psi, \; |\langle \Psi, \varphi \rangle| \leqslant c \, \|L^\star \Psi\| \,,$$

alors

$$j_\varphi(L^\star \Psi) = \langle \Psi, \varphi \rangle,$$

se prolonge par Hahn-Banach à $\overline{\mathcal{R}(L^\star)}$ puis par 0 à tout l'espace.

2. Par identification de Riesz

$$j_\varphi(g) = \langle g, f_\varphi \rangle,$$

et alors pour tout Ψ

$$\langle \Psi, \varphi \rangle = j_\varphi(L^\star \Psi) = \langle L^\star \Psi, f_\varphi \rangle = \langle \Psi, L f_\varphi \rangle.$$

3. Ainsi, pour un opérateur linéaire continu L on a

$$\boxed{\varphi \in \mathcal{R}(L) \iff \exists c > 0 / \; \forall \Psi, \; |\langle \Psi, \varphi \rangle| \leqslant c \, \|L^\star \Psi\| \,.}$$

3 - Factorisation de l'opérateur de mesures

1. L'opérateur Δ_F a une factorisation de la forme

$$\Delta_F = V^{\infty}_{n_0} A C^{\star}.$$

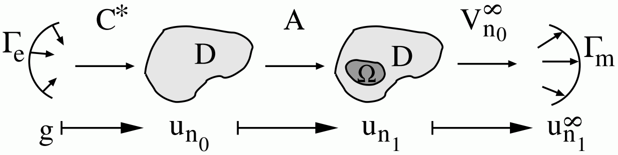


Fig.: Eléments de la factorisation de l'opérateur de mesures.

2. Avec l'opérateur de scattering $S = (Id + 2ik\,|\gamma|^2\, F_{n_0})$, on a

$$V^{\infty}_{n_0} = SC.$$

3. Ainsi, le produit d'opérateurs $S\Delta_F$ se factorise sous la forme

$$\boxed{S\Delta_F = CAC^{\star}.}$$

4 - Caractérisation par les mesures

1. L'opérateur A est un isomorphisme de $L^2(\Omega)$ et coercif.
2. Par [Kirsch, 2002], l'opérateur W, construit à partir des mesures et défini par
$$W = |S\Delta_F - (S\Delta_F)^\star| + |S\Delta_F + (S\Delta_F)^\star|,$$
a une factorisation de la forme
$$W = CBC^\star,$$
avec B coercif, positif et auto-adjoint.
3. Ainsi on obtient

$$\boxed{\text{L'opérateur W est positif, auto-adjoint et la forme positivement homogène } \langle W\Psi,\ \Psi\rangle^{\frac{1}{2}} \text{ est comparable à } \|\chi_\Omega C^\star\Psi\|.}$$

5 - Conclusion

$$
\begin{aligned}
z \in \Omega \iff & \overline{u_{n_0}(\cdot,z)} \in \mathcal{R}\left(C\chi_\Omega\right) && \text{(étape 1)} \\
\iff & \forall\Psi,\ \left|\langle \Psi,\ \overline{u_{n_0}(\cdot,z)}\rangle\right| \leqslant c\,\|C^\star\Psi\| && \text{(étape 2)} \\
\iff & \forall\Psi,\ \left|\langle \Psi,\ \overline{u_{n_0}(\cdot,z)}\rangle\right| \leqslant c\langle W\Psi,\ \Psi\rangle^{\frac{1}{2}} && \text{(étapes 3\&4)}
\end{aligned}
$$

- Caractérisation par $\mathfrak{M}_{\{n_0,n_1\}}(z) > 0$

$$
\iff \overline{u_{n_0}(\cdot,z)} \in \mathcal{R}\left(W^{\frac{1}{2}}\right)
$$

- Caractérisation par $\mathfrak{P}_{\{n_0,n_1\}}(z) > 0$

Applications numériques

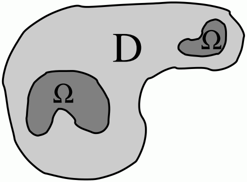
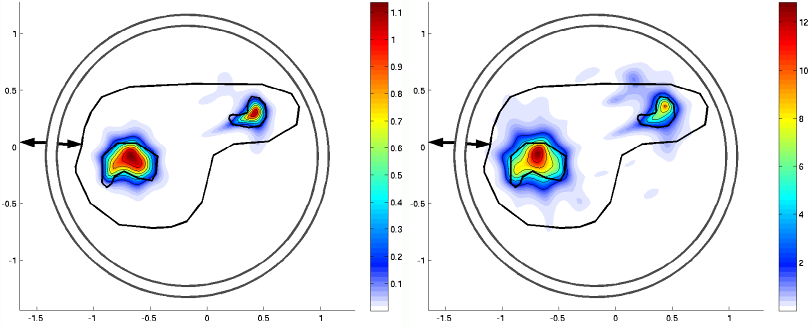


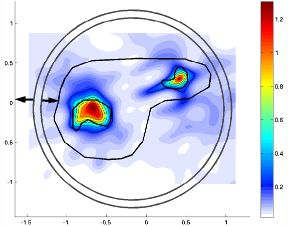
Fig.: Géométrie de l'objet et des défauts



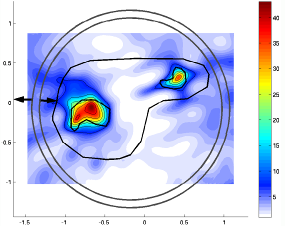
(a) Valeurs de $\mathfrak{M}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$

(b) Valeurs de $\mathfrak{P}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$

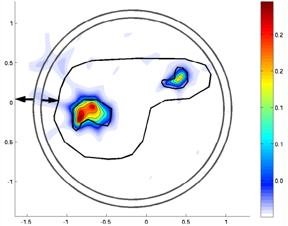
Fig.: Faible bruitage des mesures



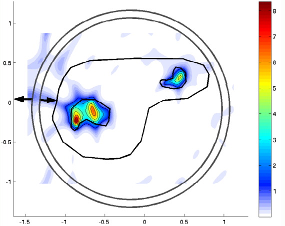
(a) Valeurs de $\mathfrak{M}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$ avec W



(b) Valeurs de $\mathfrak{P}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$ avec W



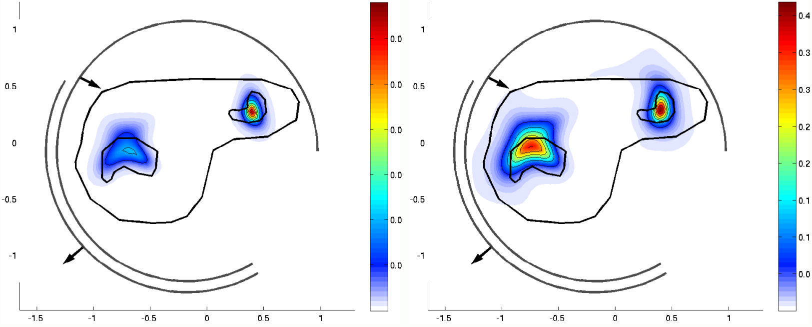
(c) Valeurs de $\mathfrak{M}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$ avec $|\Delta_F|$



(d) Valeurs de $\mathfrak{P}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$ avec $|\Delta_F|$

Fig.: Fort bruitage des mesures

Extension des algorithmes



(a) Valeurs de $\mathfrak{M}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$ avec $|\Delta_F|$ (b) Valeurs de $\mathfrak{P}_{\{n_0,n_1\}}(z_i)$ avec $|\Delta_F|$

Fig.: Emissions décorellées des réceptions

Conclusions et perspectives

Conclusions

- Extension du principe de la méthode de "Factorization" à la reconstruction de forme de défauts en champ lointain
- Dévelopement de deux méthodes
- Validation numérique de ces méthodes
- Validation numérique d'une possibilité d'extension de ces méthodes

Perspectives

- Etendre le cadre d'application des méthodes de reconstruction de défauts
- Ajouter la reconstruction des fonctions tests à partir de mesures
  $\longrightarrow$ Détection de mouvement
- Intégrer ces informations dans un schéma de reconstruction globale des paramètres d'objets

Merci pour votre attention