



Un schéma d'ordre deux pour la résolution de l'équation de Landau-Lifchitz par éléments finis

E. Kritsikis, F. Alouges, J.C. Toussaint

SMAI 2011, Guidel

24 mai 2011

- 1 L'équation LLG
- 2 De l'ordre I à l'ordre II
- 3 Application : le problème standard du NIST

Modèle du **micromagnétisme** pour les matériaux ferromagnétiques

- Milieu continu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
- Aimantation $\frac{M}{M_s} = m : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$

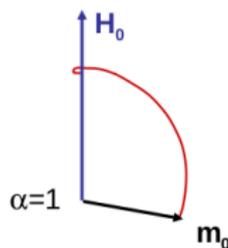
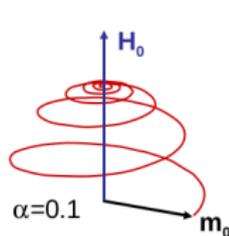
Équation de Landau-Lifchitz

Modèle du **micromagnétisme** pour les matériaux ferromagnétiques

- Milieu continu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$
- Aimantation $\frac{M}{M_s} = m : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} &= -\gamma\mu_0 m \times H_{\text{eff}} + \alpha m \times \frac{\partial m}{\partial t} && \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial m}{\partial n} &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

- localement m tend à s'aligner sur H_{eff}
- $\alpha > 0$ coefficient d'amortissement



$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\gamma\mu_0 m \times H_{eff} + \alpha m \times \frac{\partial m}{\partial t}$$

- $|m(x, t)| = 1$ est conservé
- $H_{eff} = \underbrace{\frac{2A}{\mu_0 M_s} \Delta m}_{H_e(m)} + \underbrace{\frac{2K}{\mu_0 M_s} (m \cdot u) u + H_d(m)}_{H_a(m)} + H_{ext}$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\gamma\mu_0 m \times H_{\text{eff}} + \alpha m \times \frac{\partial m}{\partial t}$$

■ $|m(x, t)| = 1$ est conservé

$$\text{■ } H_{\text{eff}} = \underbrace{\frac{2A}{\mu_0 M_s} \Delta m}_{H_e(m)} + \underbrace{\frac{2K}{\mu_0 M_s} (m \cdot u) u + H_d(m)}_{H_a(m)} + H_{\text{ext}}$$

EDP non linéaire avec des termes non locaux et une contrainte non convexe...

Forme adimensionnée, $H_{\text{eff}} = \Delta m + \dots$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -m \times \Delta m + \alpha m \times \frac{\partial m}{\partial t}$$

Forme de Gilbert

$$m_t - \alpha m \times m_t = -m \times \Delta m$$

Forme de Gilbert

$$m_t - \alpha m \times m_t = -m \times \Delta m$$

Autre forme

$$\alpha m_t + m \times m_t = \Delta m - (\Delta m \cdot m)m$$

En multipliant par m_t et intégrant :

$$\alpha \int |m_t|^2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\nabla m|^2$$

Forme de Gilbert

$$m_t - \alpha m \times m_t = -m \times \Delta m$$

Autre forme

$$\alpha m_t + m \times m_t = \Delta m - (\Delta m \cdot m)m$$

En multipliant par m_t et intégrant :

$$\alpha \int |m_t|^2 = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\nabla m|^2$$

Forme de LL

$$(1 + \alpha^2)m_t = -m \times \Delta m + \alpha(\Delta m - (\Delta m \cdot m)m)$$

$m \in H^1(\Omega \times [0, T], S^2)$ est une solution faible de LLG ssi

■ $\forall \phi \in H^1(\Omega \times [0, T])$

$$\int m_t \cdot \phi - \alpha \int m \times m_t \cdot \phi = \int \sum_i m \times \frac{\partial m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

En effet $-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(m \times \frac{\partial m}{\partial x_i} \right) = -\sum_i m \times \frac{\partial^2 m}{\partial x_i^2} = -m \times \Delta m.$

$m \in H^1(\Omega \times [0, T], S^2)$ est une solution faible de LLG ssi

■ $\forall \phi \in H^1(\Omega \times [0, T])$

$$\int m_t \cdot \phi - \alpha \int m \times m_t \cdot \phi = \int \sum_i m \times \frac{\partial m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

En effet $-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(m \times \frac{\partial m}{\partial x_i} \right) = -\sum_i m \times \frac{\partial^2 m}{\partial x_i^2} = -m \times \Delta m.$

■ $\frac{1}{2} \int |\nabla m(T)|^2 + \alpha \int_0^T \int \left| \frac{\partial m}{\partial t} \right|^2 \leq \frac{1}{2} \int |\nabla m(0)|^2$

Comment faire un schéma en respectant la contrainte ?

Un premier schéma explicite

Idée [Alouges] : tester par une fonction orthogonale à m en tout point
“formulation plan tangent”

$$\alpha m_t + m \times m_t = \Delta m - (\Delta m \cdot m)m$$

$$m^n \sim m(n \delta t), \quad m^n = \sum_i m_i^n \phi_i \text{ avec } \forall i, |m_i^n| = 1, \\ K_n = \{w = \sum_i w_i \phi_i, w_i \cdot m_i^n = 0\}.$$

Un premier schéma explicite

Idée [Alouges] : tester par une fonction orthogonale à m en tout point
"formulation plan tangent"

$$\alpha m_t + m \times m_t = \Delta m - (\Delta m \cdot m)m$$

$$m^n \sim m(n \delta t), \quad m^n = \sum_i m_i^n \phi_i \text{ avec } \forall i, |m_i^n| = 1, \\ K_n = \{w = \sum_i w_i \phi_i, w_i \cdot m_i^n = 0\}.$$

- Pour tout $n \geq 0$, Trouver $v^n \in K_n$ tel que $\forall w \in K_n$

$$(*) \quad \alpha \int v^n \cdot w + \int m^n \times v^n \cdot w = - \int \nabla m^n \cdot \nabla w$$

Un premier schéma explicite

Idée [Alouges] : tester par une fonction orthogonale à m en tout point
"formulation plan tangent"

$$\alpha m_t + m \times m_t = \Delta m - (\Delta m \cdot m)m$$

$$m^n \sim m(n \delta t), \quad m^n = \sum_i m_i^n \phi_i \text{ avec } \forall i, |m_i^n| = 1, \\ K_n = \{w = \sum_i w_i \phi_i, w_i \cdot m_i^n = 0\}.$$

- Pour tout $n \geq 0$, Trouver $v^n \in K_n$ tel que $\forall w \in K_n$

$$(*) \quad \alpha \int v^n \cdot w + \int m^n \times v^n \cdot w = - \int \nabla m^n \cdot \nabla w$$

- Poser $m^{n+1} = \sum_i m_i^{n+1} \phi_i$, avec $m_i^{n+1} = \frac{m_i^n + \delta t v_i^n}{|m_i^n + \delta t v_i^n|}$

Un premier schéma explicite

- Le problème (*) est linéaire.
Il possède une solution unique v^n qui converge (faiblement) vers une solution faible de (LL) quand $\delta t \rightarrow 0$, $\delta x \rightarrow 0$, et $\frac{\delta t}{\delta x^2} \rightarrow 0$.
- Proche d'un schéma explicite pour l'équation de la chaleur.
Difficile à utiliser en pratique (δt minuscules. . .)

Un premier schéma explicite

- Le problème (*) est linéaire.
Il possède une solution unique v^n qui converge (faiblement) vers une solution faible de (LL) quand $\delta t \rightarrow 0$, $\delta x \rightarrow 0$, et $\frac{\delta t}{\delta x^2} \rightarrow 0$.
- Proche d'un schéma explicite pour l'équation de la chaleur.
Difficile à utiliser en pratique (δt minuscules...)

→ Schémas implicites

- à itération non linéaire [Bartels-Prohl] : inconditionnellement stables mais la méthode de Newton converge pour $\frac{\delta t}{\delta x^2}$ suffisamment petit
- schéma implicite à itération linéaire ?

Un premier schéma explicite

- Le problème (*) est linéaire.
Il possède une solution unique v^n qui converge (faiblement) vers une solution faible de (LL) quand $\delta t \rightarrow 0$, $\delta x \rightarrow 0$, et $\frac{\delta t}{\delta x^2} \rightarrow 0$.
- Proche d'un schéma explicite pour l'équation de la chaleur.
Difficile à utiliser en pratique (δt minuscules...)

→ Schémas implicites

- à itération non linéaire [Bartels-Prohl] : inconditionnellement stables mais la méthode de Newton converge pour $\frac{\delta t}{\delta x^2}$ suffisamment petit
- schéma implicite à itération linéaire ?
- $\forall n \geq 0$, Trouver $v^n \in K_n$ tel que $\forall w \in K_n$

$$\alpha \int v^n \cdot w + \int m^{n+1} \times v^n \cdot w = - \int \nabla m^{n+1} \cdot \nabla w$$

non linéaire...

$$\blacksquare m^{n+1} = \frac{m^n + \delta t v^n}{|m^n + \delta t v^n|} \sim m^n + \delta t v^n + O(\delta t^2)$$

$$\alpha \int v^n \cdot w + \int (m^n + \delta t v^n) \times v^n \cdot w = - \int \nabla(m^n + \delta t v^n) \cdot \nabla w$$

- $m^{n+1} = \frac{m^n + \delta t v^n}{|m^n + \delta t v^n|} \sim m^n + \delta t v^n + O(\delta t^2)$

$$\alpha \int v^n \cdot w + \int (m^n + \delta t v^n) \times v^n \cdot w = - \int \nabla(m^n + \delta t v^n) \cdot \nabla w$$

- $\theta \in [0, 1]$: $\forall n \geq 0$, Trouver $v^n \in K_n$ tel que $\forall w \in K_n$

$$\alpha \int v^n \cdot w + m^n \times v^n \cdot w + \theta \delta t \int \nabla v^n \cdot \nabla w = - \int \nabla m^n \cdot \nabla w$$

- Poser $m^{n+1} = \sum_i m_i^{n+1} \phi_i$, avec $m_i^{n+1} = \frac{m_i^n + \delta t v_i^n}{|m_i^n + \delta t v_i^n|}$

- Pour $w \in H^1$ tel que $|w| \geq 1$ p.p. on a

$$\int \left| \nabla \frac{w}{|w|} \right|^2 \leq \int |\nabla w|^2$$

- Pour $w \in H^1$ tel que $|w| \geq 1$ p.p. on a

$$\int \left| \nabla \frac{w}{|w|} \right|^2 \leq \int |\nabla w|^2$$

- Q: est-ce toujours vrai en discret ?
Pour $w = \sum_i w_i \phi_i$ avec $|w_i| \geq 1$ a-t-on

$$\int \left| \nabla \sum_i \frac{w_i}{|w_i|} \phi_i \right|^2 \leq \int |\nabla w|^2 ?$$

- Pour $w \in H^1$ tel que $|w| \geq 1$ p.p. on a

$$\int \left| \nabla \frac{w}{|w|} \right|^2 \leq \int |\nabla w|^2$$

- Q: est-ce toujours vrai en discret ?
Pour $w = \sum_i w_i \phi_i$ avec $|w_i| \geq 1$ a-t-on

$$\int \left| \nabla \sum_i \frac{w_i}{|w_i|} \phi_i \right|^2 \leq \int |\nabla w|^2 ?$$

- Réponse [Bartels]: Oui, en P^1 , si le maillage est de Delaunay (2D) ou d'angles diédraux inférieurs à $\frac{\pi}{2}$ (3D) (**)

A priori l'étape de normalisation empêche une formulation d'ordre II
($|m + \delta t v| = 1 + \frac{\delta t^2}{2}|v|^2 + O(\delta t^4)$)

A priori l'étape de normalisation empêche une formulation d'ordre II
($|m + \delta t v| = 1 + \frac{\delta t^2}{2}|v|^2 + O(\delta t^4)$)

Idée : Trouver $v \perp m$ tel que

$$\frac{m + \delta t v}{|m + \delta t v|} = m(t + \delta t) + O(\delta t^3)$$

soit exact à l'ordre II.

A priori l'étape de normalisation empêche une formulation d'ordre II
($|m + \delta t v| = 1 + \frac{\delta t^2}{2}|v|^2 + O(\delta t^4)$)

Idée : Trouver $v \perp m$ tel que

$$\frac{m + \delta t v}{|m + \delta t v|} = m(t + \delta t) + O(\delta t^3)$$

soit exact à l'ordre II.

On trouve $v = m_t + \frac{\delta t}{2} \Pi_{m^\perp} m_{tt}$

(la normalisation ajoute exactement $\frac{\delta t^2}{2} \Pi_{m^\parallel} m_{tt}$)

- $\forall n \geq 0$, Trouver $v^n \in K_n$ tel que $\forall w \in K_n$

$$\int \alpha v^n \cdot w + m^n \times v^n \cdot w + \frac{\delta t}{2} \int \nabla v^n \cdot \nabla w - \frac{\delta t}{2} \int |\nabla m^{n+s}|^2 v^n \cdot w = - \int \nabla m^n \cdot \nabla w$$

Le schéma d'ordre II

- $\forall n \geq 0$, Trouver $v^n \in K_n$ tel que $\forall w \in K_n$

$$\int \alpha v^n \cdot w + m^n \times v^n \cdot w + \frac{\delta t}{2} \int \nabla v^n \cdot \nabla w - \frac{\delta t}{2} \int |\nabla m^{n+s}|^2 v^n \cdot w = - \int \nabla m^n \cdot \nabla w$$

- Poser $m^{n+1} = \sum_i m_i^{n+1} \phi_i$, avec $m_i^{n+1} = \frac{m_i^n + \delta t v_i^n}{|m_i^n + \delta t v_i^n|}$

- $\forall n \geq 0$, Trouver $v^n \in K_n$ tel que $\forall w \in K_n$

$$\int \alpha v^n \cdot w + m^n \times v^n \cdot w + \frac{\delta t}{2} \int \nabla v^n \cdot \nabla w - \frac{\delta t}{2} \int |\nabla m^{n+s}|^2 v^n \cdot w = - \int \nabla m^n \cdot \nabla w$$

- Poser $m^{n+1} = \sum_i m_i^{n+1} \phi_i$, avec $m_i^{n+1} = \frac{m_i^n + \delta t v_i^n}{|m_i^n + \delta t v_i^n|}$

- Contrôle de l'énergie pour $s = 1$, au prix d'une légère non linéarité

Le schéma d'ordre II

- $\forall n \geq 0$, Trouver $v^n \in K_n$ tel que $\forall w \in K_n$

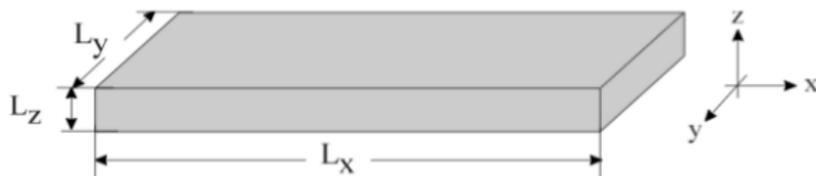
$$\int \alpha v^n \cdot w + m^n \times v^n \cdot w + \frac{\delta t}{2} \int \nabla v^n \cdot \nabla w - \frac{\delta t}{2} \int |\nabla m^{n+s}|^2 v^n \cdot w = - \int \nabla m^n \cdot \nabla w$$

- Poser $m^{n+1} = \sum_i m_i^{n+1} \phi_i$, avec $m_i^{n+1} = \frac{m_i^n + \delta t v_i^n}{|m_i^n + \delta t v_i^n|}$
- Contrôle de l'énergie pour $s = 1$, au prix d'une légère non linéarité
- Pour $s = 0$, le schéma nécessite la résolution d'un problème linéaire mais n'est pas robuste.

Application : problème standard du NIST

→ Code FELLGOOD

Dynamique de l'aimantation dans une plaquette de Permalloy



$$L_x \times L_y \times L_z = 500 \text{ nm} \times 125 \text{ nm} \times 3 \text{ nm}$$

Paramètres physiques

- aimantation à saturation $\mu_0 M_s = 1 \text{ T}$
- constante d'échange $A = 1.3 \times 10^{-11} \text{ J/m}$
- longueur caractéristique $\ell = \sqrt{\frac{2A}{\mu_0 M_s^2}} = 5.7 \text{ nm}$

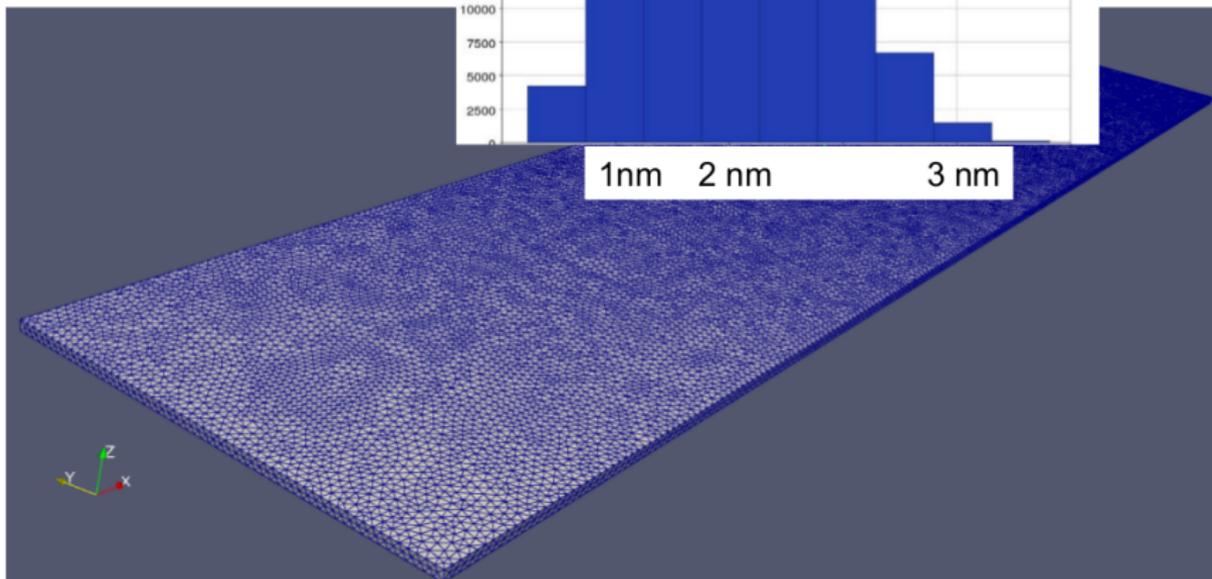
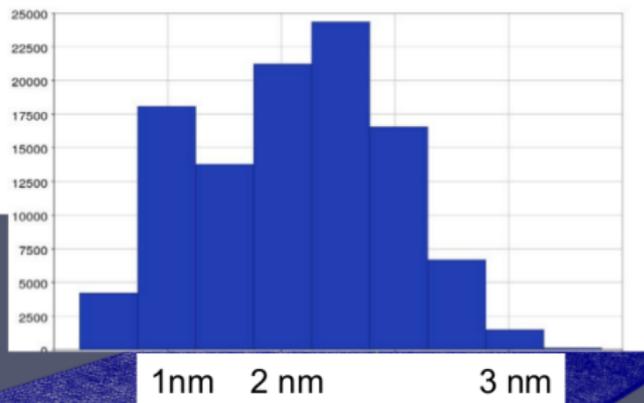
<http://www.ctcms.nist.gov/~rdm/std4/spec4.html>

Maillage

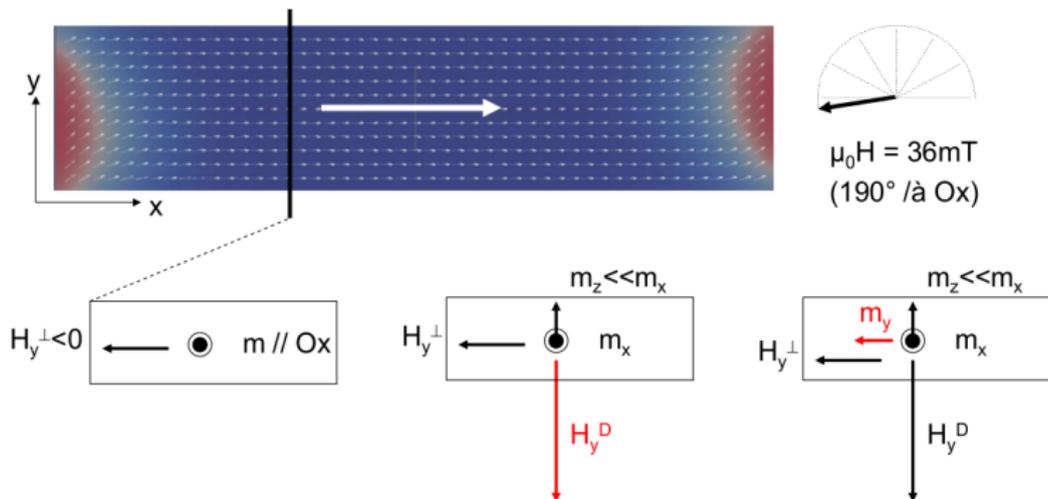
Maillage gmsh*

33000 nœuds

170 000 tétraèdres (P1)

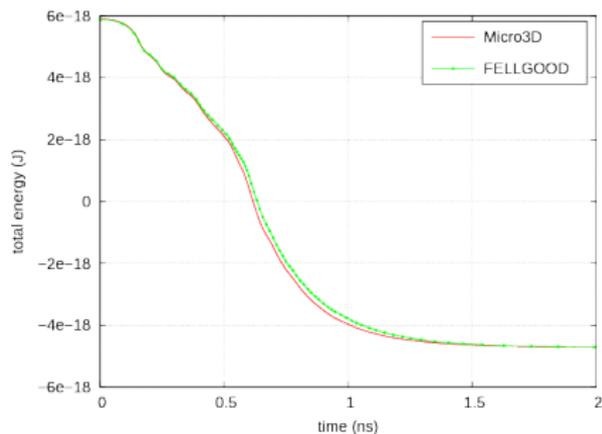
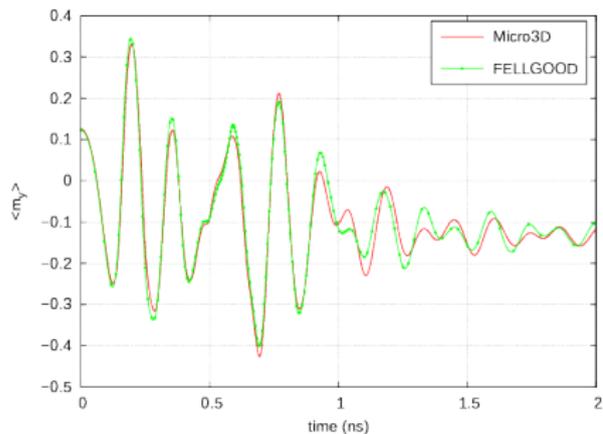


- état initial "S" : équilibre obtenu en diminuant à 0 un champ saturant (111)
- dynamique de l'aimantation sous champ à partir de l'état S ($\alpha = 0.01$)



Comparaison EF/DF

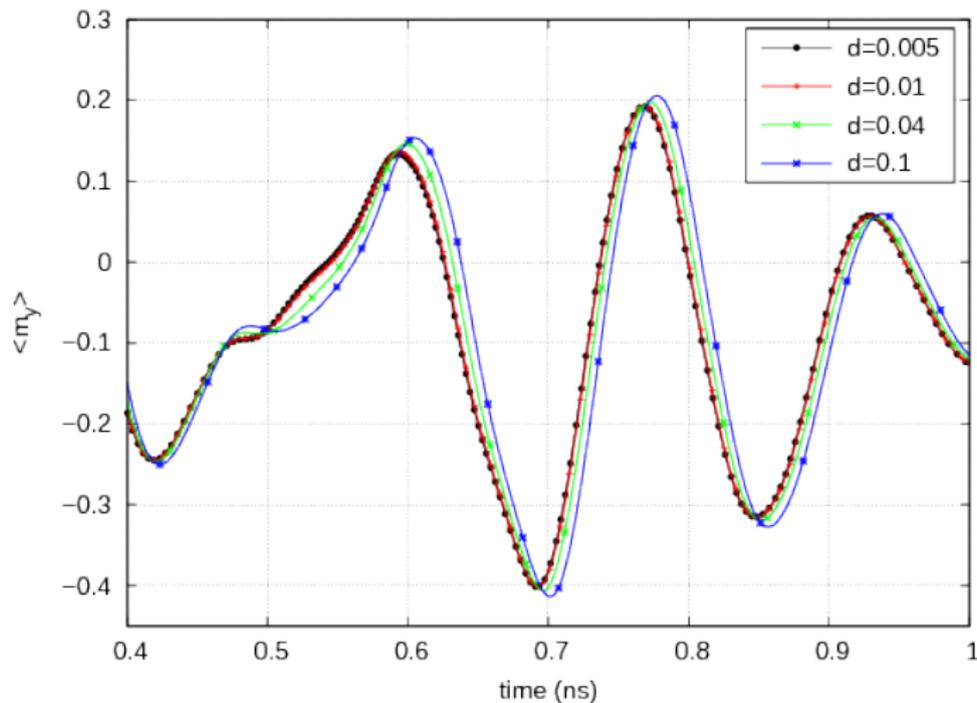
■ référence DF "Micro3D" (L. Buda)



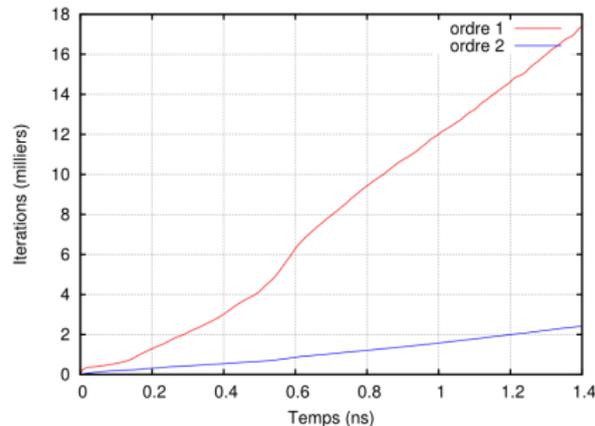
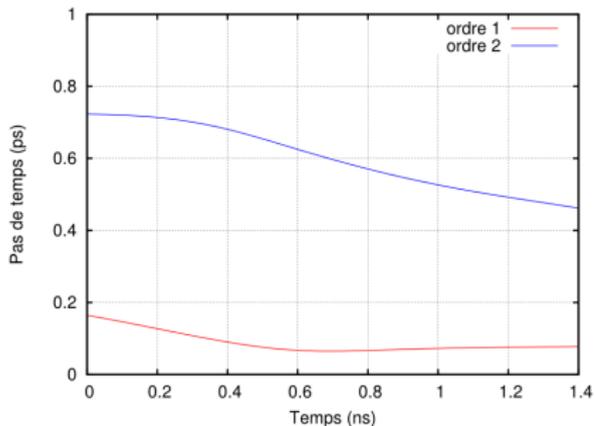
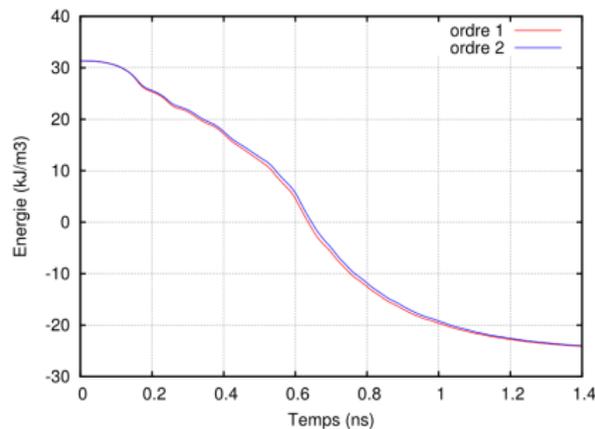
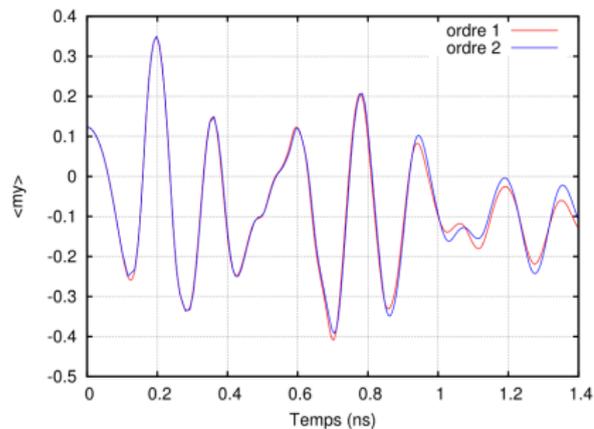
Convergence en pas de temps

■ ordre II

■ $d = \max_{i,n} |m^{n+1} - m^n|$

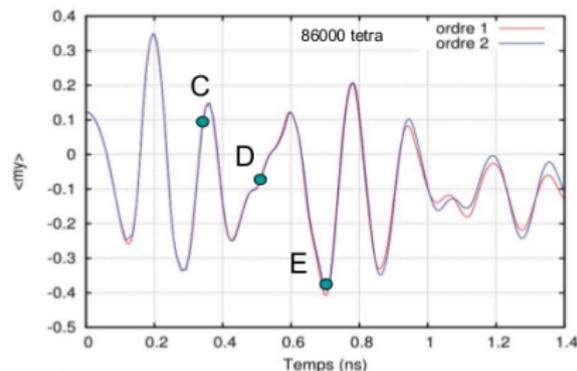


Comparaison ordre 1 / ordre 2



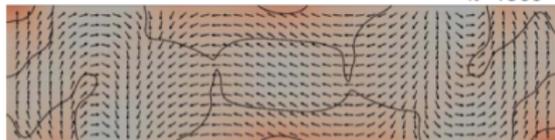
Comparaison ordre 1 / ordre 2

Configurations dynamiques
ordre 1 et ordre 2

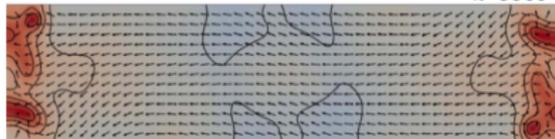


Ordre 1

it=4500



it=8500



it=14400



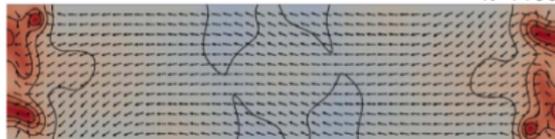
Ordre 2

it=900



C

it=1100



D

it=1500



E

- Schéma robuste d'ordre II en temps
- Gain d'un facteur 10 par rapport à l'ordre I
- Ordre I en espace
- FMM ou NFFT pour le champ démagnétisant
- Meilleurs préconditionneurs ?