Limite diffusive d'une équation cinétique stochastique

Arnaud Debussche[1] and Julien Vovelle[2]

Congrès SMAI 2011

[1] U. Rennes, ENS Cachan Bretagne
[2] U. Lyon 1

Une équation cinétique stochastique

Soit (V,μ) un espace mesuré où μ est une mesure finie. Soit $a \in L^\infty(V;\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$. Soit $\mathbb{T}^d$ le tore de dimension d. On s'intéresse à la limite $\varepsilon \to 0$ du problème

$$\partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} a(v) \cdot \nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} L f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} f^\varepsilon m^\varepsilon(t), \tag{1}$$

dans $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{T}_x^d \times V_v$, avec condition initiale

$$f^\varepsilon(0) = f_0 \text{ dans } \mathbb{T}_x^d \times V_v, \tag{2}$$

où L est un opérateur dissipatif et $m^\varepsilon(t)$ un processus stochastique ergodique centré.

Equation déterministe

L'opérateur L est

$$Lf = \int_V f d\mu - f, \quad f \in L^1(V, \mu).$$

Alors L est en effet dissipatif car

$$-\int_V Lf \cdot f d\mu = \|Lf\|^2_{L^2(V,\mu)}, \quad f \in L^2(V, \mu).$$

Les vitesses sont centrées et non-dégénérées au sens où

$$\int_V a(v) d\mu(v) = 0, \quad K := \int_V a(v) \otimes a(v) d\mu(v) > 0$$

Equation déterministe, Limite diffusive

Dans le cas déterministe $m^\varepsilon \equiv 0$, la densité $\rho^\varepsilon := \int_V f^\varepsilon d\mu$ converge lorsque $\varepsilon \to 0$ vers la solution ρ de l'équation de diffusion

$$\partial_t \rho - \mathrm{div}(K\nabla\rho) = 0 \text{ dans } \mathbb{T}^d \times (0, +\infty)$$

avec donnée initiale $\rho_0 = \int_V f_0 d\mu$ (voir Degond, Goudon, Poupaud 2000 par exemple).

Partie aléatoire

De la forme

$$dx^\varepsilon(t) = F(x^\varepsilon(t), m^\varepsilon(t)) + \frac{1}{\varepsilon} G(x^\varepsilon(t), m^\varepsilon(t)).$$

On suppose que le processus pilote $m^\varepsilon(t)$ a l'échelle $m^\varepsilon(t) = m(\varepsilon^{-2}t)$ où $m(t)$ est un processus de Markov homogène stationnaire mélangeant. Si $G \equiv 0$, on a alors $x^\varepsilon(t) \to \overline{x}(t)$ où

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = \overline{F}(\overline{x}(t)), \quad \overline{F}(x) := \int_{\mathbb{R}} F(x,n) d\nu(n),$$

où ν est la mesure invariante de $m(t)$. Cas $G \neq 0, F \equiv 0$?

Exemple 1

En dimension 1. Soit $\alpha > 0$ et m la solution stationnaire de l'équation

$$dm(t) = -cm(t)dt + d\beta(t),$$

où $\beta(t)$ est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$.

$$G(x, n) = xn.$$

Exemple 1

Calculs :

$$m(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)} d\beta(s), \ t \in \mathbb{R},$$

$$x^{\varepsilon}(t) = x_0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t m^{\varepsilon}(s)ds\right), \ t > 0.$$

Autrement dit,

$$x^{\varepsilon}(t) = x_0 \exp\left(-\varepsilon\alpha^{-1}(m^{\varepsilon}(t) - \beta(\varepsilon^{-2}t)\right), \ t > 0.$$

Exemple 1

Or, *en loi*,

$$\varepsilon\beta(\varepsilon^{-2}t) = \beta(t)$$

et $\varepsilon m^\varepsilon(t) \to 0$ donc, *en loi*, $x^\varepsilon(t) \to x(t) := x_0 e^{\alpha^{-1}\beta(t)}$, qui est la solution de l'équation de diffusion (sous forme Stratonovitch)

$$dx(t) = x(t) \circ Q^{1/2} d\beta(t),$$

avec $Q := \alpha^{-2}$.

Exemple 2

$m(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $G(x, m) = xm$. Alors, de même,

$$x^{\varepsilon}(t) = x_0 \exp\left(\varepsilon N(\varepsilon^{-2} t)\right), \quad N(t) := \int_0^t m(s) ds.$$

Exemple 2

$m(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ à valeurs dans $\{-1,1\}$ et $G(x,m)=xm$. Alors, de même,

$$x^\varepsilon(t)=x_0\exp\left(\varepsilon N(\varepsilon^{-2}t)\right), \quad N(t):=\int_0^t m(s)ds.$$

Soit $0=t_0<t_1<\dots<t_n<\dots$ la suite aléatoire des temps de saut du processus m. Soit ξ_n la variable aléatoire

$$\xi_n=(t_{2n-1}-t_{2n-2})-(t_{2n}-t_{2n-1}).$$

Les ξ_n sont i.i.d de loi de densité $\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|t|}$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2

Soit $k(t)$ l'entier aléatoire défini par

$$t_{k(t)} \leq t < t_{k(t)+1},$$

et soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n(t) = \frac{k(nt)}{2t}$. On a alors, pour $\varepsilon = n^{-1/2}$,

$$\varepsilon N(\varepsilon^{-2} t) = \sqrt{\frac{\nu_n(t)}{n}} \frac{1}{\sqrt{\nu_n(t)}} S_{\lfloor \nu_n(t) t \rfloor} + o(1), \; S_k := \xi_1 + \cdots + \xi_k.$$

Comme m saute en moyenne à la fréquence λ, on a $\frac{\nu_n(t)}{n} \to \frac{\lambda}{2}$ en loi.

Exemple 2

Par le Théorème de Donsker (avec temps aléatoire), on a alors, *en loi*,

$$x^\varepsilon(t) \to x(t) := x_0 \exp\left(\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\beta(t)\right),$$

où β est un mouvement brownien et σ la variance de ξ_j. On calcule $\sigma^2 = \frac{2}{\lambda^2}$, c'est-à-dire que, là encore, x est solution de l'équation limite de diffusion

$$dx(t) = x(t) \circ Q^{1/2} d\beta(t),$$

avec $Q := \lambda^{-1}$.

Une équation cinétique stochastique

Soit (V,μ) un espace mesuré où μ est une mesure finie. Soit $a\in L^\infty(V;\mathbb{R}^d)$, $d\geq 1$. Soit $\mathbb{T}^d$ le tore de dimension d. On s'intéresse à la limite $\varepsilon\to 0$ du problème

$$\partial_t f^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}a(v)\cdot\nabla_x f^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}Lf^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}f^\varepsilon m^\varepsilon(t), \tag{3}$$

dans $\mathbb{R}^+_t\times\mathbb{T}^d_x\times V_v$, avec condition initiale

$$f^\varepsilon(0)=f_0 \text{ dans } \mathbb{T}^d_x\times V_v, \tag{4}$$

où L est un opérateur dissipatif et $m^\varepsilon(t)$ un processus stochastique ergodique centré.

Limite $\varepsilon \longrightarrow 0$

Théorème Soit $f_0^\varepsilon \in L^2_{x,v}$ et

$$\rho_0 := \int_V f_0 d\mu.$$

Sous les hypothèses sur la vitesse a ci-dessus et les hypothèses sur m^ε ci-dessous, on a : pour tout $\eta > 0$, la densité $\rho^\varepsilon := \int_V f^\varepsilon d\mu$ converge en loi dans $C([0,T]; H^{-\eta})$ vers la solution ρ de l'équation

$$d\rho = \mathrm{div}(K\nabla\rho)dt + \rho \circ Q^{1/2} dW(t), \text{ in } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{T}^d,$$

avec donnée initiale ρ_0, où W est un processus de Wiener cylindrique sur $L^2(\mathbb{T}^d)$, Q un opérateur positif à trace sur $L^2(\mathbb{T}^d)$ déterminé par le processus m.

Références (résumées)

- Limite diffusive déterministe (cas *linéaire*) : Degond, Goudon, Poupaud 2000 et références internes,
- Limite de diffusion probabiliste : Hasminskii 66 ; Papanicolaou, Stroock, Varadhan 77 ; Ethier, Kurtz 86 ; Fouque, Garnier, Papanicolaou, Sølna 07,
- Limite de diffusion pour NLS : Marty 06 ; De Bouard, Debussche 10 ; Debussche, Tsutsumi 10,
- Méthode de la fonction-test perturbée appliquée aux EDPs aléatoires : Gazeau, De Bouard 11.

Méthode de la fonction-test perturbée

Problème : On suppose que le processus pilote $m^\varepsilon(t)$ a l'échelle $m^\varepsilon(t) = m(\varepsilon^{-2}t)$ où $m(t)$ est un processus de Markov homogène stationnaire mélangeant. Soit

$$dx^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} G(x^\varepsilon(t), m^\varepsilon(t)). \tag{5}$$

Quelle est la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ de x^ε ?

Convergence en loi

Loi du processus $(x^\varepsilon(t), m^\varepsilon(t))$: générateur

$$\mathcal{L}^\varepsilon\varphi(x,n) = \frac{1}{\varepsilon}G(x,n)\partial_x\varphi(x,n) + \frac{1}{\varepsilon^2}M\varphi(x,n), \quad \varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^2),$$

où M est le générateur du semi-groupe associé à m. Si $\varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{E}\varphi(x^\varepsilon(t)) = \varphi(x_0) + \int_0^t \mathbb{E}\mathcal{L}^\varepsilon\varphi(x^\varepsilon(s), m^\varepsilon(s))ds.$$

Il faut déterminer le comportement de $\mathcal{L}^\varepsilon\varphi$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Méthode de la fonction-test perturbée

Chercher des correcteurs $\varphi_1, \varphi_2 \in C_b^2(\mathbb{R}^2)$ tels que, pour la fonction test corrigée

$$\varphi^\varepsilon := \varphi + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2,$$

on ait

$$\mathcal{L}^\varepsilon \varphi^\varepsilon(x, n) = \mathcal{L}\varphi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

où $\mathcal{L}$ est le générateur limite.

Equations de correction

Les équations de correction sont

$$M\varphi(x) = 0, \tag{6}$$

$$G(x,n)\partial_x\varphi(x) + M\varphi_1(x,n) = 0, \tag{7}$$

$$G(x,n)\partial_x\varphi_1(x) + M\varphi_2(x,n) = \mathcal{L}\varphi(x). \tag{8}$$

La première équation est automatiquement vérifiée car φ ne dépend pas de n. Pour résoudre la deuxième équation, il faut savoir résoudre l'équation de Poisson associée à M.

Equation de Poisson

Pour une assez grande classe de fonctions ψ telles que $\langle \psi, \nu \rangle = 0$, l'équation

$$M\theta = \psi, \quad \psi \in C_b(\mathbb{R})$$

a une solution $\theta \in C_b(E)$, unique sous la condition $\langle \theta, \nu \rangle = 0$, donnée par

$$\theta(n) = M^{-1}\psi(n) := -\int_0^\infty P_t\psi(n)dt.$$

Ici ν est la mesure invariante (loi de $m(t)$), P_t le semi-groupe associé à $m(t)$.

Equations de correction

Les équations de correction sont

$$G(x,n)\partial_x\varphi(x) + M\varphi_1(x,n) = 0, \tag{9}$$

$$G(x,n)\partial_x\varphi_1(x) + M\varphi_2(x,n) = \mathcal{L}\varphi(x). \tag{10}$$

On obtient $\varphi_1 = -M^{-1}G\partial_x\varphi$ et

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \int_E G(x,n)\partial_x(M^{-1}G(x,n)\partial_x\varphi(x))d\nu(n).$$

Exemples 1 et 2

Ici $G(x,n) = xn$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\varphi(x) &= \int_E nM^{-1}n d\nu(n) x\partial_x(x\partial_x\varphi(x)) \\ &= \frac{1}{2}Qx\partial_x(x\partial_x\varphi(x)), \quad Q := 2\mathbb{E}\int_0^\infty m(0)m(t)dt.\end{aligned}$$

On vérifie qu'on retrouve $Q = \alpha^{-2}$ et $Q = \lambda^{-1}$ respectivement dans $dx = x \circ Q^{1/2} d\beta$.

Limite $\varepsilon \longrightarrow 0$

Théorème Soit $f_0^\varepsilon \in L^2_{x,v}$ et

$$\rho_0 := \int_V f_0 d\mu.$$

Sous les hypothèses sur la vitesse a ci-dessus et les hypothèses sur m^ε ci-dessous, on a : pour tout $\eta > 0$, la densité $\rho^\varepsilon := \int_V f^\varepsilon d\mu$ converge en loi dans $C([0,T]; H^{-\eta})$ vers la solution ρ de l'équation

$$d\rho = \mathrm{div}(K\nabla\rho)dt + \rho \circ Q^{1/2}dW(t), \text{ in } \mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{T}^d,$$

avec donnée initiale ρ_0, où W est un processus de Wiener cylindrique sur $L^2(\mathbb{T}^d)$, Q un opérateur positif à trace sur $L^2(\mathbb{T}^d)$ déterminé par le processus m.

Coefficient Q dans l'EDPS limite

C'est l'opérateur intégral

$$Qf(x) = \int_{\mathbb{T}^d} k(x,y)f(y)dy, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

où

$$k(x,y) := \mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} m(0)(y)m(t)(x)dt, \quad x,y \in \mathbb{T}^d.$$

Merci