Inclusion différentielle stochastique

Juliette Venel [1], Frédéric Bernicot [2]

[1] Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
[2] Université de Lille

Congrès SMAI
Guidel, le 26 Mai 2011

Plan

Plan

Notations

Soit C un ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$, on note pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

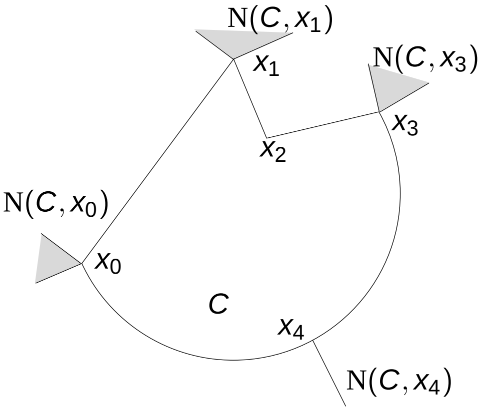
$$d_C(x) = \inf_{y \in C} |y - x|$$

et

$$\mathrm{P}_C(x) = \{y \in C\,,\ |y - x| = d_C(x)\}\,.$$

On désigne par I l'intervalle de temps $[0, T]$ ($T > 0$).

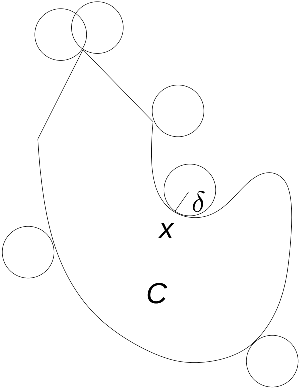
Cône proximal normal



Cône proximal normal de C en x

$$\mathrm{N}(C, x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^d \,,\; \exists \alpha > 0 \,,\; x \in \mathrm{P}_C(x + \alpha v) \right\}$$

Uniforme prox-régularité



Ensemble prox-régulier

Soit C un ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$, C est η-prox-régulier si pour tout point $\tilde{x}$ à distance $\delta < \eta$ de C, la projection de $\tilde{x}$ sur C est bien définie.

Hypomonotonie du cône proximal normal

$$\forall y \in C, \forall x \in \partial C, \forall v \in \mathrm{N}(C, x), \langle y - x, v \rangle \leq \frac{|v|}{2\eta}|x - y|^2.$$

Processus de rafle

Processus de rafle (PR)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \mathrm{N}(C(t), x(t)) \ni f(t, x(t)) \text{ p.p.t. } t \in I \\ x(0) = x_0 \in C(0) \end{cases}$$

Hypothèses pour que le problème (PR) soit bien posé

- $\forall t \in I\,,\; C(t)$ est η- prox-régulier
- C varie de manière absolument continue
  $\forall y \in \mathbb{R}^d\,,\; \forall s,t \in I\,,\; |d_{C(t)}(y) - d_{C(s)}(y)| \leq |a(t) - a(s)|$
  où a est une fonction absolument continue de I dans $\mathbb{R}$
- f Lipschitz et à croissance au plus linéaire par rapport à la seconde variable et vérifie
  $\forall t \in I\,,\; |f(t,x)| \leq \beta(t)(1 + |x|)$ avec $\beta \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$

Plan

Définitions

Propriété géométrique

Soit C un ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$ vérifie la propriété A s'il existe

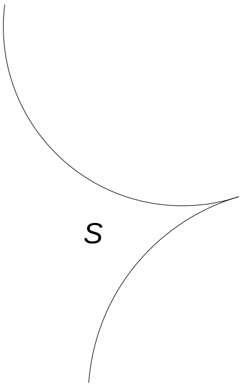
- des réels $r, \delta > 0$
- des suites $(x_p)_p$ et $(u_p)_p$ vérifiant $x_p \in \partial C$ et $|u_p| = 1$
- un recouvrement borné $B(x_p, r)_p$ de ∂C tels que

$$\forall p\,,\ \forall x \in \partial C \cap B(x_p, 2r)\,,\ \forall v \in \mathrm{N}(C, x)\,,\ \langle v, u_p \rangle \geq \delta |v|$$

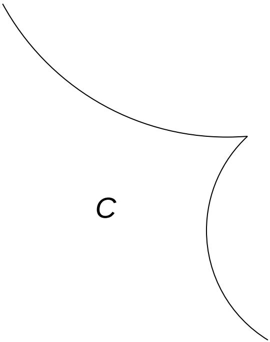
Ensemble admissible

Soit C un ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$, C est admissible s'il est uniformément prox-régulier et vérifie la propriété A.

Illustration



L’ensemble S
n’est pas admissible.



L’ensemble C
est admissible.

Définitions

Propriété géométrique

Soit $C : I \rightrightarrows \mathbb{R}^d$, $C(\cdot)$ vérifie la propriété B s'il existe

- des réels $r, \delta, \tau > 0$ et
- pour tout $t \in I$ des suites $(x_p)_p$ et $(u_p)_p$ vérifiant $x_p \in \partial C(t)$ et $|u_p| = 1$ tels que
- pour tout $s \in I$ avec $|t - s| \leq \tau$ $B(x_p, r)_p$ soit un recouvrement borné de $\partial C(s)$ et

$$\forall p\,,\ \forall y \in \partial C(s) \cap B(x_p, 2r)\,,\ \forall v \in \mathrm{N}(C(s), y)\,,$$

$$\langle v, u_p \rangle \geq \delta |v|$$

Ensemble admissible

Soit $C : I \rightrightarrows \mathbb{R}^d$, $C(\cdot)$ est admissible si pour tout $t \in I$, $C(t)$ est η-prox-régulier et vérifie la propriété B.

Problème de Skorohod déterministe (Sk)

Soit $h \in C^0(I, \mathbb{R}^d)$ vérifiant $h(0) \in C(0)$, on cherche un couple (x, k) de fonctions continues sur I vérifiant

- $\forall t \in I, x(t) \in C(t)$
- $k \in BV(I, \mathbb{R}^d)$
- $\forall t \in I, x(t) + k(t) = h(t)$
- la mesure dk est à support dans $\{t \in I,\ x(t) \in \partial C(t)\}$:

$$|k|(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{x(s) \in \partial C(s)} d|k|(s), \qquad k(t) = \int_0^t \xi(s) d|k|(s),$$

avec $\xi(s) \in \mathrm{N}(C(s), x(s))$ et $|\xi(s)| = 1$ si $\xi(s) \neq 0$.

Ici $|k|(t)$ est la variation totale de k sur $[0, t]$.

Lien entre processus de rafle et problème de Skorohod

$$\dot{x}(t) + \mathrm{N}(C(t), x(t)) \ni f(t, x(t))$$

$$x(t) + k(t) = h(t)$$

$$k(t) = \int_0^t \xi(s) d|k|(s)$$

$$\xi(s) \in \mathrm{N}(C(s), x(s))$$

(Sk) est une version intégrale de (PR).

Problème (Sk) bien posé

Théorème

Soit une application multivaluée $C : I \rightrightarrows \mathbb{R}^d$ admissible et variant de manière absolument continue.
Pour tout $h \in C^0(I, \mathbb{R}^d)$ avec $h(0) \in C(0)$, il existe une unique solution (x, k) de SkP.

Plan

Processus de rafle stochastique

• Espace de probabilité Ω muni d'une filtration standard $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et un mouvement brownien standard réel $(B_t)_{t\geq 0}$ associé à cette filtration.

• $f, \sigma : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ bornées et Lipschitz par rapport à la deuxième variable.

On cherche un processus stochastique $(X_t)_{t\in I}$ solution de l'inclusion différentielle stochastique (PRS)

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t + \mathrm{N}(C(t), X_t) \ni f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ \\ X_0 = x_0, \end{array} \right.$$

où $x_0 \in C(0)$ (donnée initiale déterministe).

Processus de rafle stochastique

Plus précisément, on cherche des processus $(X_t)_{t\in I}$ et $(K_t)_{t\in I}$ tels que

a) $(X_t)_{t\in I}$ processus à valeurs dans $C(t)$ et $\mathcal{F}_t$-adapté à trajectoires continues

b) $(K_t)_{t\in I}$ processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{F}_t$-adapté dont les trajectoires sont continues et à variation bornée sur I

c) $dX_t + dK_t = f(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$

d) $X_0 = x_0$ presque sûrement

e) le processus dK_t est supporté sur $\{t,\ X_t \in \partial C(t)\}$:

$$|K|_t = \int_0^t \mathbf{1}_{X_s\in\partial C(s)} d|K|_s, \qquad K_t = \int_0^t \xi_s d|K|_s,$$

avec $\xi_s \in \mathrm{N}(C(s), X_s)$ et $|\xi_s| = 1$ si $\xi_s \neq 0$.

Problème bien posé

Théorème

Pour toute $x_0 \in C(0)$, il existe un unique processus $(X_t)_{t \in I}$ solution de (PRS) au sens de l'unicité trajectorielle.

Idée : $t_0^n = 0, \ \ t_k^n = k/2^n$

On résout sur $[t_k^n, t_{k+1}^n]$ le problème de Skorohod :

$$\begin{aligned} X_n(t) = X_n(t_k^n) \quad & + \quad \int_{t_k^n}^t \sigma(t_k^n, X_n(t_k^n)) dB(s) \\ & + \quad \int_{t_k^n}^t f(t_k^n, X_n(t_k^n)) ds \\ & - \quad K_n(t) \end{aligned}$$

Bibliographie

- F. Bernicot, J. Venel, *Stochastic perturbation of sweeping process and a convergence result for an associated numerical scheme*, à paraître dans Journal of Differential Equations.
- J.F. Edmond, L. Thibault, *Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process*, Math. Program, Ser. B 104 (2-3), 347-373, 2005.
- P.L. Lions, A.S. Sznitman, *Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math. 37, 511-527, 1984.
- Y. Saisho, *Stochastic differential equations for multi-dimensional domain with reflecting boundary*, Probab. Theory Rel. Fields 74 (3), 455-477, 1987.