

Simulation d'écoulements sanguins cérébraux en géométrie réaliste

Soyibou SY, IRMA, Université de Strasbourg

Stéphanie SALMON, LM EA 4535, Université de Reims

Marcela SZOPOS, IRMA, Université de Strasbourg

SMAI 2011

Guidel, Bretagne, 27 mai 2011

Plan de l'exposé

2/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

- 1 Construction du maillage et Objectifs
- 2 Problème de Stokes stationnaire
- 3 Conditions aux limites
- 4 Quelques tests 3D
- 5 Ecoulement dans une géométrie réaliste
- 6 Conclusion et perspectives

Construction du maillage et Objectifs

3/24

Simulation
d'écoulements
sanguins en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Motivations
et Objectifs

Construction du maillage

- Le réseau cérébral est obtenu à partir d'angiographies cérébrales 3D (fournies par les hôpitaux de Strasbourg et de Colmar).
- Par les méthodes de segmentation, on obtient des données de volumes vasculaires discrets. De ces données volumiques, on obtient un maillage surfacique (Nicolas PASSAT).
- On repère les entrées et sorties (conditions aux limites) et on lisse le maillage, afin de générer un maillage volumique (ghs3d).

Objectifs :

Effectuer des simulations d'écoulements sanguins dans tout le réseau cérébral à l'aide de FreeFem++.

- Etudier le modèle stationnaire, puis non stationnaire et conditions aux limites
- Comparer les résultats numériques à des données cliniques.

Premier maillage

4/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Motivations
et Objectifs



Figure: Maillage.



Maillage avec 169524 Tétraèdes

5/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Motivations
et Objectifs

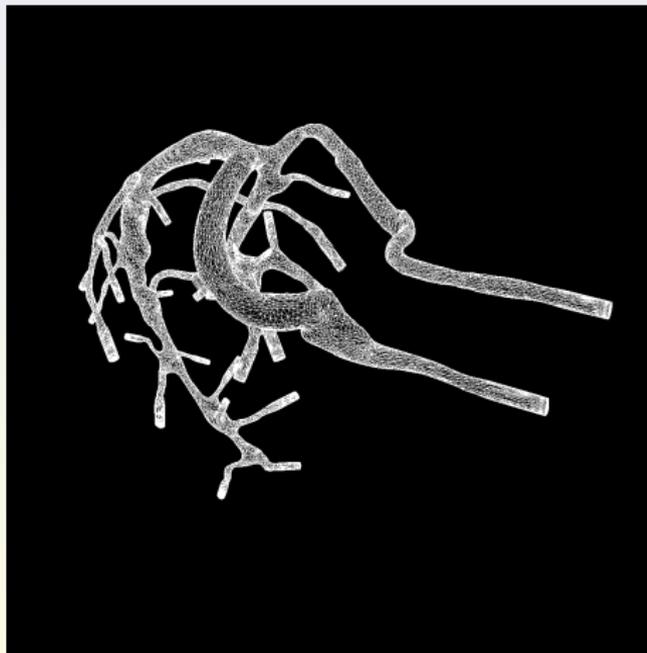


Figure: Maillage de Calcul.

Maillage avec 237438 Tétraèdes

6/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Motivations
et Objectifs

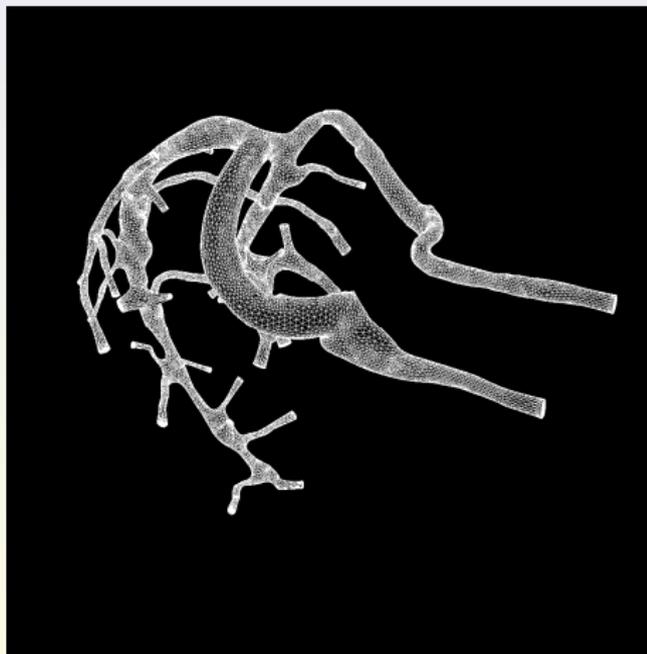


Figure: Maillage de Calcul.

Position du problème

7/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Formulation
mathématique
du problème

Modèle de
Stokes
stationnaire
Formulation
faible

Conditions
aux limites

Écoulement de
type poiseuille

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ suffisamment régulier, on considère le modèle de Stokes stationnaire suivant :

$$\begin{cases} -2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega \\ \text{C.L.}, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

avec

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_x u_1 & \partial_y u_1 & \partial_z u_1 \\ \partial_x u_2 & \partial_y u_2 & \partial_z u_2 \\ \partial_x u_3 & \partial_y u_3 & \partial_z u_3 \end{pmatrix}, \quad (\nabla \mathbf{u})^T = \begin{pmatrix} \partial_x u_1 & \partial_x u_2 & \partial_x u_3 \\ \partial_y u_1 & \partial_y u_2 & \partial_y u_3 \\ \partial_z u_1 & \partial_z u_2 & \partial_z u_3 \end{pmatrix}.$$

Formulation faible

8/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Formulation
mathématique
du problème

Modèle de
Stokes
stationnaire
Formulation
faible

Conditions
aux limites

Écoulement de
type poiseuille

On introduit : $\sigma = -p\mathbb{I}_2 + 2\nu \epsilon(\mathbf{u})$ et $\epsilon(\mathbf{u}) : \nabla \mathbf{v} := \text{tr}((\epsilon(\mathbf{u}))^T \nabla \mathbf{v})$.
Trouver $\mathbf{u} \in V$ et $p \in M$:

$$2\nu \int_{\Omega} \epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in W$$
$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \forall q \in M. \quad (2)$$

Remarque

- Si on impose comme C.L : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ sur $\partial\Omega$, on prend $V = (H^1(\Omega))^3$ avec $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ sur $\partial\Omega$ et $W = (H_0^1(\Omega))^3$. Dans ce cas $M = L^2_0(\Omega)$.
- Si $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ sur Γ_1 , $\sigma \mathbf{n} = 0$ sur Γ_2 . Alors $V = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^3 : \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ avec $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$ et $W = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3 : \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ et $M = L^2_0(\Omega)$.
- Sinon on décompose

$$\sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \sigma \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau}).$$



Poiseuille en 2D

9/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Formulation
mathématique
du problème

Modèle de
Stokes
stationnaire
Formulation
faible

Conditions
aux limites

Écoulement de
type poiseuille

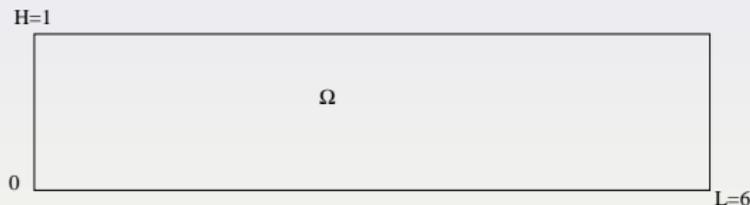


Figure: Le domaine de calcul Ω

Nous cherchons \mathbf{u} sous la forme $U(y) = \mathbf{u}(y)\vec{e}_x = u_1(y)$ et $p = p(x)$:

$$U(y) = \frac{4U_{\max}}{H^2}y(H-y), \quad p(x) = \frac{\Delta p}{L}x + p_0, \quad \text{avec } U_{\max} = \frac{H^2\Delta p}{8\nu L}.$$

Dans les tests numériques, on a choisi :

$$U_{\max} = 0.3, \quad \nu = 1.$$

Vitesse (poiseuille à l'entrée et sortie libre)

10/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

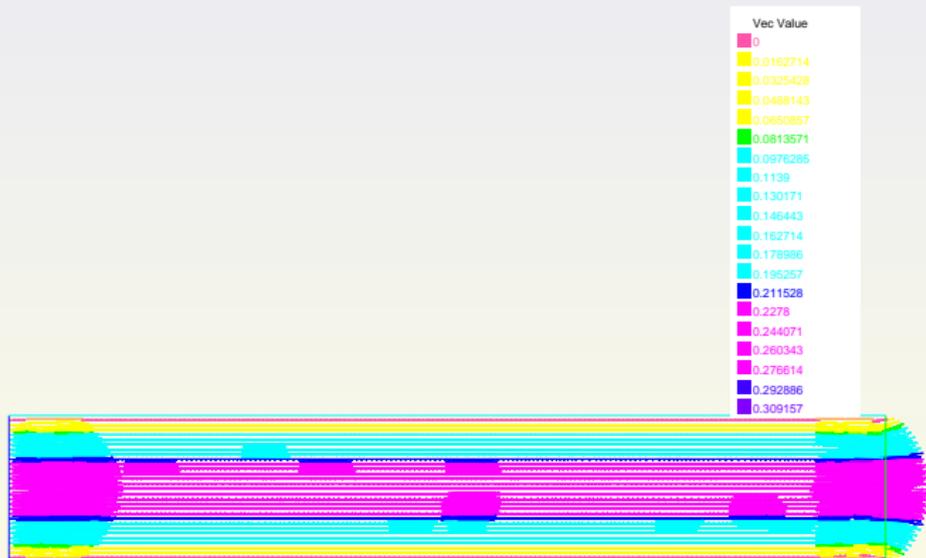
Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Formulation
mathématique
du problème

Modèle de
Stokes
stationnaire
Formulation
faible

Conditions
aux limites

Écoulement de
type poiseuille



Pression (poiseuille à l'entrée et sortie libre)

11/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

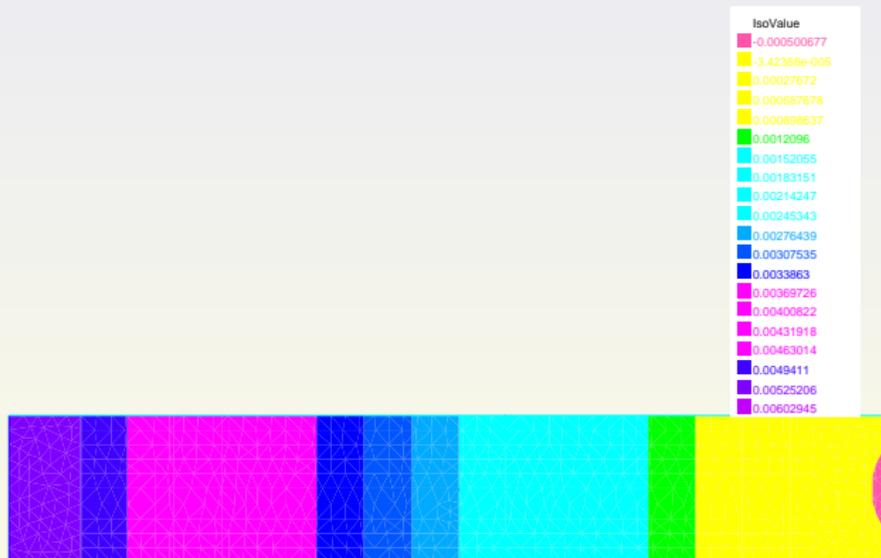
Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Formulation
mathématique
du problème

Modèle de
Stokes
stationnaire
Formulation
faible

Conditions
aux limites

Écoulement de
type poiseuille



Vitesse (poiseuille à l'entrée et à la sortie)

12/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

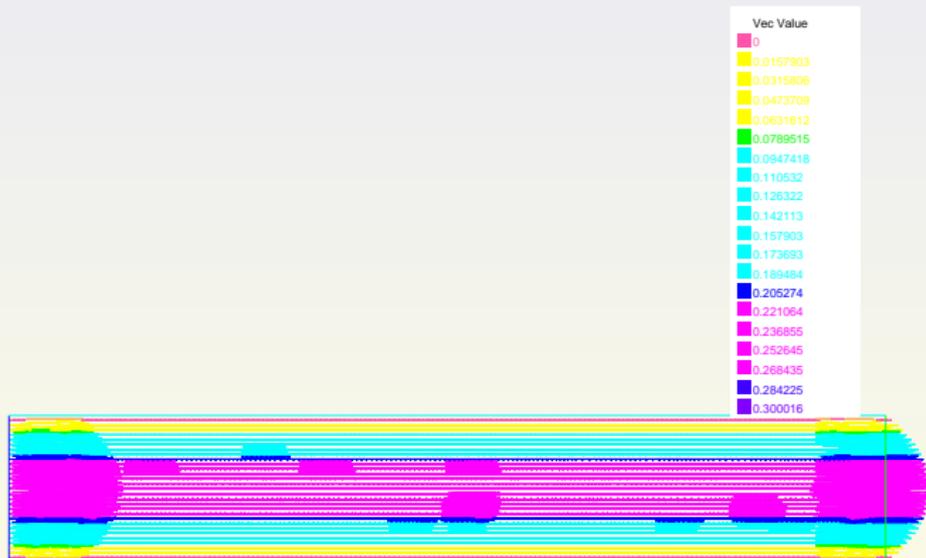
Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Formulation
mathématique
du problème

Modèle de
Stokes
stationnaire
Formulation
faible

Conditions
aux limites

Écoulement de
type poiseuille



Pression (poiseuille à l'entrée et à la sortie)

13/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

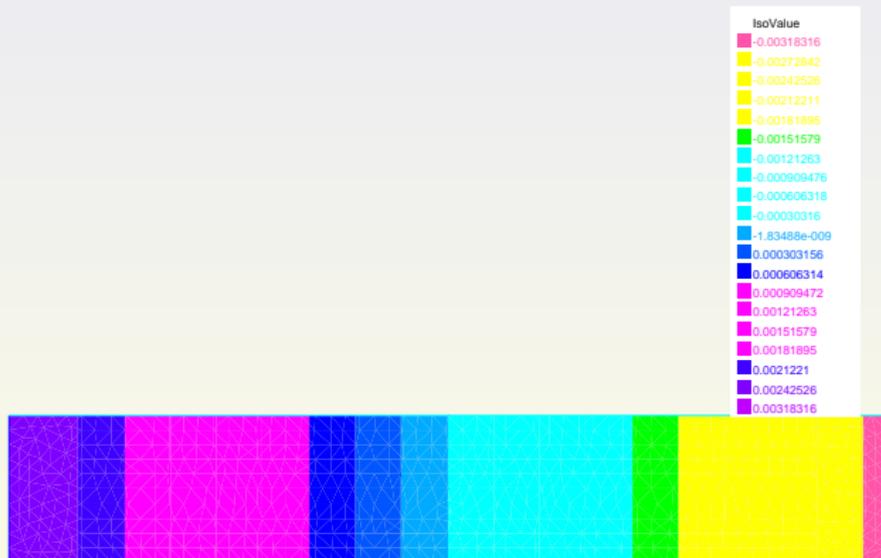
Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Formulation
mathématique
du problème

Modèle de
Stokes
stationnaire
Formulation
faible

Conditions
aux limites

Écoulement de
type poiseuille



Écoulement de Stokes dans le cube unité

14/24

Simulation
d'écoulements
sanguins en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Quelques
tests en 3D

- 1 On considère le modèle de Stokes précédent avec conditions de Dirichlet au bord et $\nu = 1$ et les solutions analytiques de Bercovier-Engelman extrudées (en 3D) :

$$u_1(x, y, z) = -256y(1 - y)(2y - 1)x^2(x - 1)^2$$

$$u_2(x, y, z) = 256x(1 - x)(2x - 1)y^2(y - 1)^2$$

$$u_3(x, y, z) = 0$$

$$p(x, y, z) = (x - 0.5)(y - 0.5).$$

- 2 On effectue une simulation 3D sur trois maillages différents, avec :

- 48 tétraèdres
- 384 tétraèdres
- 3072 tétraèdres
- 24576 tétraèdres

- 3 Les tests utilisent GMRES comme solveur. On pénalise pour la pression avec $\epsilon = 10^{-10}$.

Comparaison des vitesses globales

15/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Quelques
tests en 3D

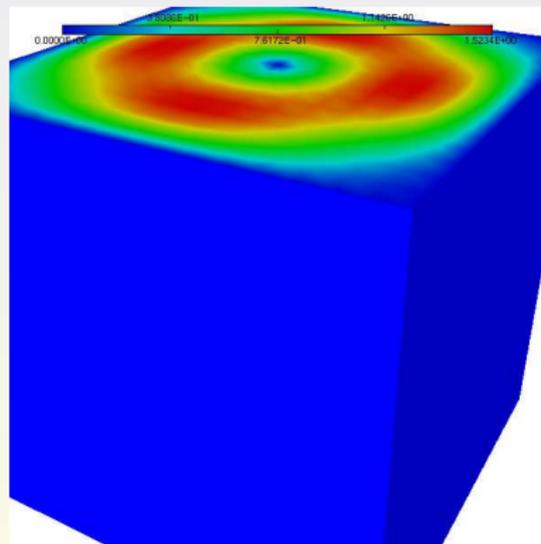
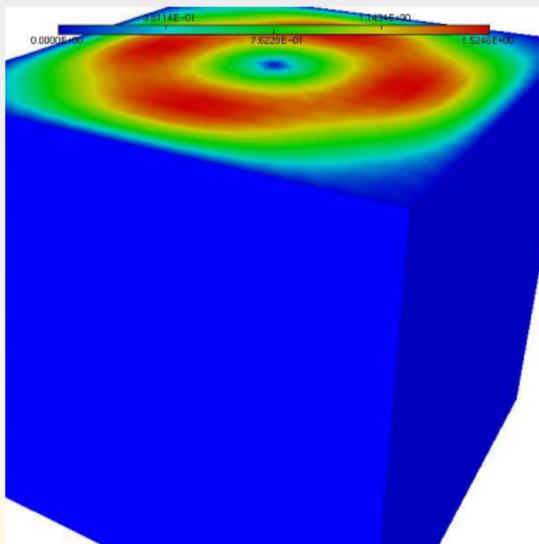


Figure: Vitesse calculée (à gauche) et vitesse exacte (à droite).

Comparaison des premières composantes des vitesses

16/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Quelques
tests en 3D

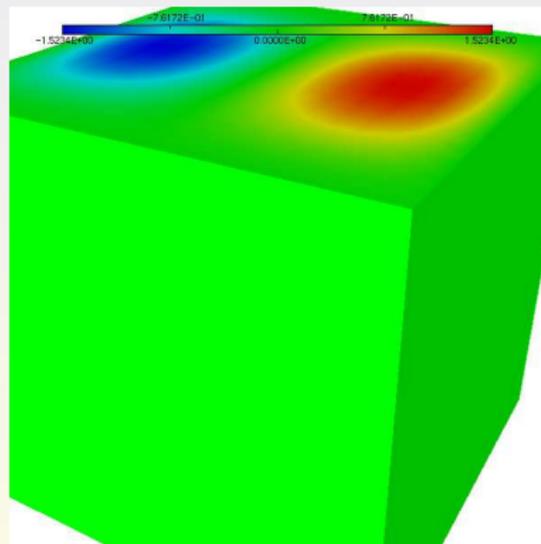
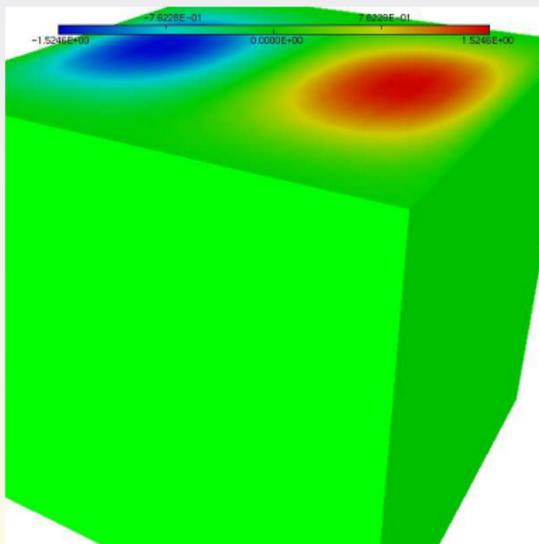


Figure: Vitesse calculée (à gauche) et vitesse exacte (à droite).

Comparaison des pressions

17/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Quelques
tests en 3D

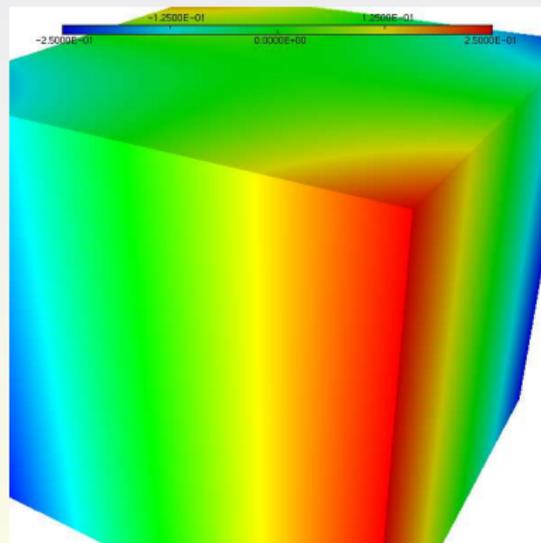
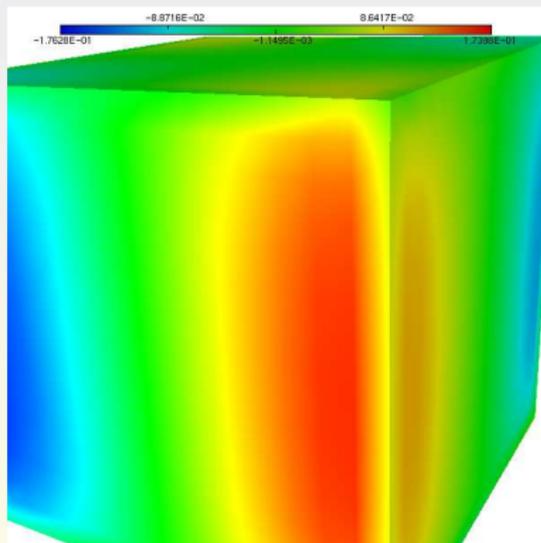


Figure: Pression calculée (à gauche) et pression exacte (à droite).

Courbes d'erreurs en norme L^2 et L^∞

18/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Quelques
tests en 3D

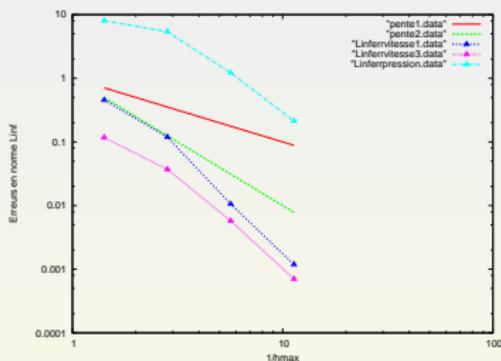
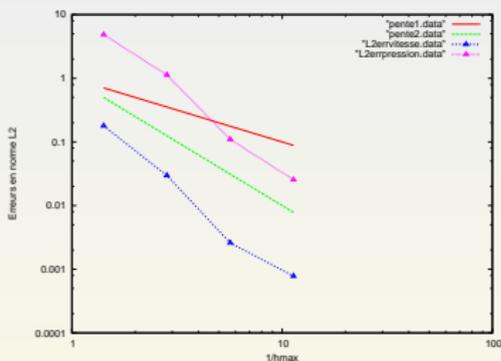


Figure: Erreurs en norme L^2 en vitesse et en pression (à gauche) et erreurs en norme L^∞ en vitesse et en pression (à droite).

Lignes de courant des vitesses(maillage avec 169524 Tétraèdes)

19/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Écoulement
dans une
géométrie
réaliste

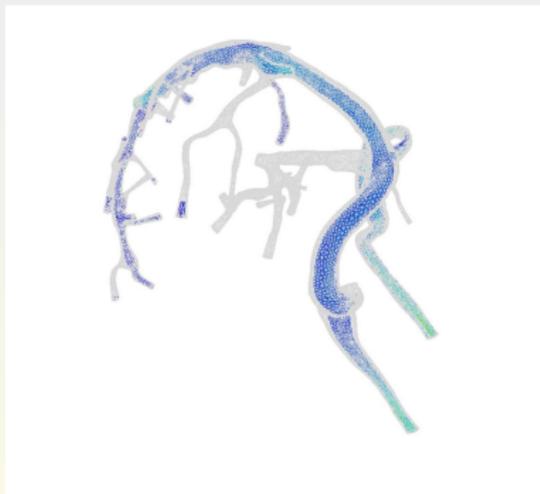


Figure: Lignes de courant des vitesses du fluide.

Lignes de courant des vitesses (maillage avec 237438 Tétraèdes)

20/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Écoulement
dans une
géométrie
réaliste

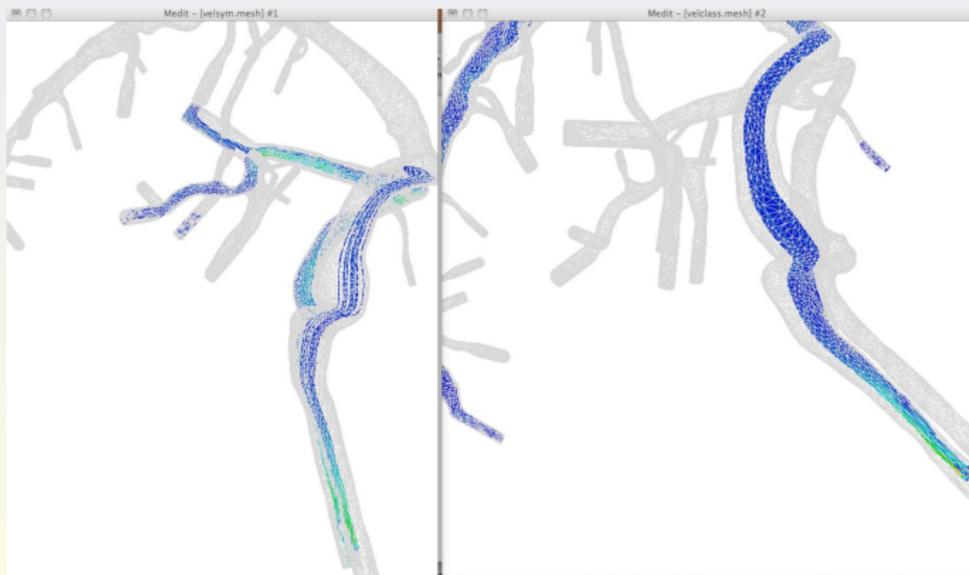


Figure: Lignes de courant des vitesses du fluide.

La pression du fluide (maillage avec 169524 Tétraaèdes)

21/24

Simulation
d'écoulements
sanguins en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Écoulement
dans une
géométrie
réaliste



Figure: La pression du fluide.

La pression du fluide (maillage avec 237438 Tétràèdes)

22/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Écoulement
dans une
géométrie
réaliste



Figure: La pression du fluide.

Conclusion et perspectives

23/24

Simulation
d'écoulements
sanguins
cérébraux en
géométrie
réaliste

Soyibou SY,
IRMA,
Université de
Strasbourg

Conclusion et
perspectives

Conclusion

- 1 Des tests numériques (2D et 3D) étaient indispensables pour valider la formulation symétrique de Stokes.
- 2 En choisissant des éléments finis P1+bulle pour la vitesse et P1 pour la pression, on arrive à effectuer la simulation de l'écoulement dans tout le réseau cérébral.

Perspectives

- 1 Reprendre le cas test sur le cube unité pour retrouver la bonne pression.
- 2 Construire une entrée du type Poiseuille pour la simulation numérique de l'écoulement dans tout le réseau cérébral.
- 3 Effectuer la simulation dans le cas d'un problème de Stokes non stationnaire.
- 4 Passer au modèle de Navier Stokes non stationnaire.

Merci pour votre attention !