

# Une méthode multi-échelles pour résoudre un problème de diffusion acoustique

S. Bernard-Andouze – O. Goubet – P. Poullet

UAG - LAMIA - Severine.Bernard@univ-ag.fr

SMAI 2011 - 24 mai 2011

# PLAN

- Introduction
- Existence et Unicité d'une solution
- Approximation par une méthode éléments finis multi-échelles
- Résultats numériques
- Conclusion

Problème elliptique indéfini (Helmholtz en 1D):

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -u_{xx} - k^2 u = f & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = 0 \\ u_x(1) = iku(1) \end{cases}$$

avec  $i^2 = -1$ ,

$k = \frac{\omega}{c} > 0$  nombre d'onde,

$\omega = \frac{2\pi}{\lambda}$  fréquence, avec  $\lambda$  longueur d'onde,

$c$  vitesse du son.

- H. Yserentant: bases hiérarchiques pour l'approximation en éléments finis.
- R. Temam: inconnues incrémentales pour l'approximation en différences finies.
- H. C. Elman et al, Y. A. Erlangga et al, E. Turkel: méthodes multigrilles classiques inefficaces pour ce type de problème à cause de son caractère indéfini.
- P. Pouillet et A. Boag: approche multi-niveaux et méthodes multigrilles classiques semblent éloignées mais ont des limites similaires pour des problèmes indéfinis.

⇒ Utilisation de la stratégie introduite par H. Yserentant.

En prenant

$$V = \{u \in L^2(0, 1); u_x \in L^2(0, 1), u(0) = 0\},$$

on a  $(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (\mathcal{P}_V)$ : trouver  $u \in V$  tel que, pour tout  $v \in V$ ,

$$\int_0^1 u_x \bar{v}_x dx - iku(1)\bar{v}(1) - k^2 \int_0^1 u \bar{v} dx = \int_0^1 f \bar{v} dx.$$

ou  $(\mathcal{P}_{VR})$ : trouver  $u \in V$  tel que, pour tout  $v \in V$ ,

$$b(u, v) \equiv \operatorname{Re} \int_0^1 u_x \bar{v}_x dx + \operatorname{Im} [ku(1)\bar{v}(1)] - k^2 \operatorname{Re} \int_0^1 u \bar{v} dx = \operatorname{Re} \int_0^1 f \bar{v} dx.$$

**Proposition:** La forme bilinéaire  $b(.,.)$  est continue sur  $V \times V$ .  
Preuve. Cauchy-Schwartz, inégalité de Poincaré et injection de Sobolev. ■

**Remarque:**  $b$  n'est pas coercive mais satisfait une inégalité de type Gårding:

$$\forall u \in V, b(u, u) = \|u_x\|_{L^2}^2 - k^2 \|u\|_{L^2}^2,$$

avec  $\|u\|_{L^2} = \left[ \int_0^1 |u|^2 dx \right]^{1/2}$ .

**Proposition:** Pour  $f \in L^2(0, 1)$  et  $k > 0$ , le problème  $(\mathcal{P}_{VR})$  a une unique solution.

Preuve. Soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  les opérateurs définis par:  $\forall (u, v) \in V^2$ ,

$$(\mathcal{A}u, v) = \operatorname{Re} \int_0^1 u_x \overline{v_x} dx \text{ et } (\mathcal{B}u, v) = (\mathcal{A}u, v) - b(u, v).$$

D'après l'alternative de Fredholm,

- (a) soit l'équation  $\mathcal{A}u - \mathcal{B}u = f$  a une unique solution,
- (b) soit l'équation  $\mathcal{A}u - \mathcal{B}u = 0$  n'admet pas la fonction nulle comme solution.

Si  $u \in V$  vérifie  $\mathcal{A}u - \mathcal{B}u = 0$  alors, en prenant comme fonction test  $v = u$ , on aurait  $u(1) = 0$  et donc  $u$  vérifierait:

$$-u_{xx} - k^2 u = 0 \text{ dans } D'(0, 1), u(0) = u(1) = 0.$$

ie  $u = 0$ , ce qui est impossible, d'où (a). ■

Remarque: Ihlenburg-Babuska: La solution de  $(\mathcal{P}_{VR})$  est:

$$u(x) = \int_0^1 K(x, s) f(s) ds,$$

avec  $K(x, s) = \frac{1}{k} e^{2k \max(x, s)} \sin(k \min(x, s))$ . Par conséquent, on a

$$k \|u\|_{L^2} + \|u_x\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

De plus, le problème adjoint  $(\mathcal{P}_{VRA})$  :

trouver  $u \in V$  tel que ,  $\forall v \in V$ ,  $b(v, u) = (f, v)$ ,

a une unique solution qui vérifie aussi

$$k \|u\|_{L^2} + \|u_x\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}.$$

# Maillage

- Grille grossière:

$$h_0 = \frac{1}{n_0 + 1}, x_j^0 = jh_0, K_j^0 = [x_{j-1}^0, x_j^0], j = 0, \dots, n_0 + 1.$$

- On affine: chaque  $K_j^0$  est divisé en 2 sous-intervalles  $K_{l-1}^1$  et  $K_l^1$ ,  $l = 0, \dots, 2n_0 + 1$ , et ainsi de suite jusqu'à un niveau dit fin  $d$ .
- Grille fine:

$$h = h_d = \frac{1}{2^d n_0 + 1}, x_j^d = jh_d, K_j^d = [x_{j-1}^d, x_j^d], j = 0, \dots, 2^d n_0 + 1.$$

- Espace d'approximation:

$$V_0^h = \{v_h \in \mathcal{C}([0, 1]), v_h(0) = 0, \text{ et } v_{h/K_j^0} \in P_1, j = 0, \dots, n^0\},$$

...

$$V_d^h = \{v_h \in \mathcal{C}^0([0, 1]), v_h(0) = 0, \text{ et } v_{h/K_j^d} \in P_1, j = 0, \dots, 2^d n_0\}.$$

On a alors  $V_0^h \subset V_1^h \subset \dots \subset V_{d-1}^h \subset V_d^h$ .

- Opérateur d'interpolation relatif au niveau  $j$ :

$$\forall u \in \mathcal{C}([0, 1]), I_j u \in V_j^h, I_j u(x) = u(x), \text{ for all } x \in \{x_0^j, \dots, x_{n_j}^j\}.$$

- Décomposition multi-niveaux de  $V^h = V_d^h$ ,

$$\forall u_h \in V^h, \quad u_h = I_0 u_h + \sum_{j=1}^d (I_j u_h - I_{j-1} u_h).$$

**Théorème**: Supposons que  $h_0$  soit tel que  $h_0 k^4$  soit suffisamment petit et  $k > 1$ . En notant

$$(V_0^h)^\perp = \{v \in V; b(u_0^h, v) = 0, \text{ for all } u_0^h \in V_0^h\}$$

on a  $b/((V_0^h)^\perp)^2$  coercive. De plus, la résolution du problème variationnel discret:

$$(\mathcal{P}_{VRD}) : \text{trouver } u_h \in V^h / \forall v_h \in V^h, b(u_h, v_h) = \operatorname{Re} \int_0^1 f \overline{v_h} dx,$$

à l'aide de la base hiérarchique, conduit à la résolution d'un système linéaire de taille  $n = 1/h$ , qui se sépare en un système non elliptique, inversible de taille  $1/h_0$  et un autre elliptique bien conditionné.

- Etape 1: Mq  $b/((V_0^h)^\perp)^2$  coercive (astuce de Nitsche). Soit  $u \in (V_0^h)^\perp$ . Pour  $\varphi$  solution de  $(\mathcal{P}_{VRA})$ , avec  $f = u$ , on a

$$\forall v \in V, b(v, \varphi) = \operatorname{Re} \int_0^1 u \bar{v} dx.$$

En prenant  $v = u$  et utilisant l'orthogonalité,

$$\forall \varphi_0^h \in V_0^h, \|u\|_{L^2}^2 = b(u, \varphi - \varphi_0^h).$$

D'après EF standard, il existe  $c_*$  (indépendante de  $h$ ) tq

$$\inf_{\varphi_0^h \in V_0^h} \left\| \left( \varphi - \varphi_0^h \right)_x \right\|_{L^2} \leq c_* h_0 \|\varphi_{xx}\|_{L^2},$$

et la continuité de  $b$  donne

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq c_* h_0 (1 + k + k^2) \|u_x\|_{L^2} \|\varphi_{xx}\|_{L^2}.$$

Et l'estimation d'Ihlenburg-Babuska sur  $(\mathcal{P}_{VRA})$  implique:

$$b(u, u) = \|u_x\|_{L^2}^2 - k^2 \|u\|_{L^2}^2 \geq (1 - 36c_*^2 h_0^2 k^8) \|u_x\|_{L^2}^2.$$

- Etape 2: On considère la base hiérarchique associée à la décomposition multi-niveaux  $\psi_1, \dots, \psi_m, \dots, \psi_n$ , où  $\psi_1, \dots, \psi_m$  est une base de l'espace grossier  $V_0^h$  ( $m \sim \frac{1}{2^d h}$ ,  $n \sim \frac{1}{h}$ ).  
La résolution du problème discret revient à résoudre le système

$$AU = F,$$

où  $A = [b(\psi_k, \psi_j)]_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $F = [\operatorname{Re} \int_0^1 f \overline{\psi_j} dx]_{1 \leq j \leq n}$ .

On écrit

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

où  $A_{11} = [b(\psi_k, \psi_j)]_{1 \leq i, j \leq m}$  : restriction de  $b$  à  $(V_0^h)^2$ .

On a

$$AU = F \Leftrightarrow \begin{cases} A_{11}u_1 = f_1 - A_{12}u_2, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 = f_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_{11}u_1 = f_1 - A_{12}u_2, \\ (A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})u_2 = f_2 - A_{21}A_{11}^{-1}f_1, \end{cases}$$

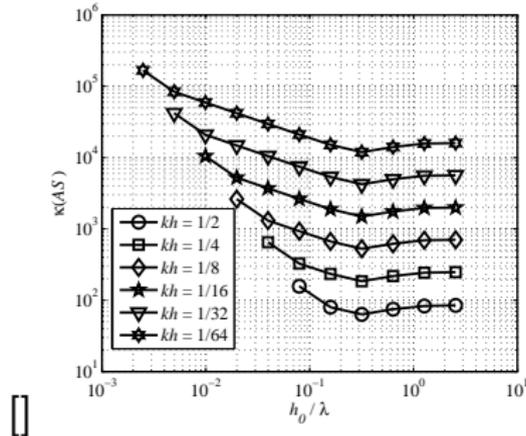
car  $A_{11}$  est inversible, d'après étape 1.

La 1ère équation est de petite taille par rapport au pb considéré et la 2ème demande d'inverser la matrice de Schur:

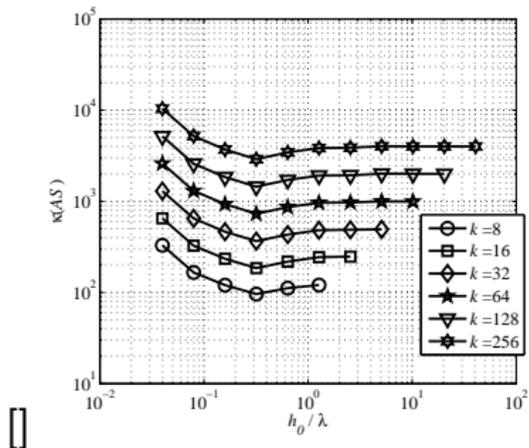
$$R = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}.$$

- Etape 3: Conditionnement  $\kappa(R) = 6k^2\kappa(\tilde{A}_0)$ , où  $\tilde{A}_0$  est la matrice du Laplacien usuel preconditionné par la base hiérarchique et d'après H. Yserentant,  $\kappa(\tilde{A}_0) = O(d^2)$ . ■

- Comportement du conditionnement avec nombre d'onde fixé  $k = 16$  et différentes valeurs de taille de mèche fine  $h$ :



- Comportement du conditionnement avec  $kh = 4$  fixé et différentes valeurs du nombre d'onde  $k$ :



- P. Pouillet et A. Boag: résultats numériques en 2D et 3D.
- Résultats théoriques en 2D: écrire la condition de radiation de Sommerfeld  $u(x) \sim e^{ikx}$  en  $+\infty$ .
- Référence: A multilevel method for solving the Helmholtz equation: the analysis of the one-dimensional case (S. Andouze, O. Goubet, P. Pouillet). A paraître dans IJNAM.