

Contrôle optimal géométrique et numérique appliqué au problème de transfert Terre-Lune

Gautier PICOT

Institut de Mathématiques de Bourgogne

Congrès SMAI 2011
5ème Biennale Française des Mathématiques Appliquées
24 Mai 2011

1. Modélisation du système Terre-Lune-satellite

1. Modélisation du système Terre-Lune-satellite
2. Transferts à temps minimal

1. Modélisation du système Terre-Lune-satellite
2. Transferts à temps minimal
3. Transferts à énergie minimale

1. Modélisation du système Terre-Lune-satellite
2. Transferts à temps minimal
3. Transferts à énergie minimale
 - ▶ Transferts Terre-Lune

1. Modélisation du système Terre-Lune-satellite
2. Transferts à temps minimal
3. Transferts à énergie minimale
 - ▶ Transferts Terre-Lune
 - ▶ Approximations par recollement de trajectoires

1. Modélisation du système Terre-Lune-satellite
2. Transferts à temps minimal
3. Transferts à énergie minimale
 - ▶ Transferts Terre-Lune
 - ▶ Approximations par recollement de trajectoires
 - ▶ Transferts au voisinage du point L_1

1. Modélisation du système Terre-Lune-satellite
2. Transferts à temps minimal
3. Transferts à énergie minimale
 - ▶ Transferts Terre-Lune
 - ▶ Approximations par recollement de trajectoires
 - ▶ Transferts au voisinage du point L_1
4. Conclusion et perspectives

Le mouvement du satellite entre la Terre et la Lune est modélisé par le problème restreint des trois corps plan.

Description générale :

Les primaires M_1 et M_2 sont en révolution circulaire autour de leur centre de masse. Le corps M_3 évolue dans le plan défini par leur rotation sans influencer leur mouvement. On suppose que $M_1 + M_2 = 1$, $d(M_1, M_2) = 1$.

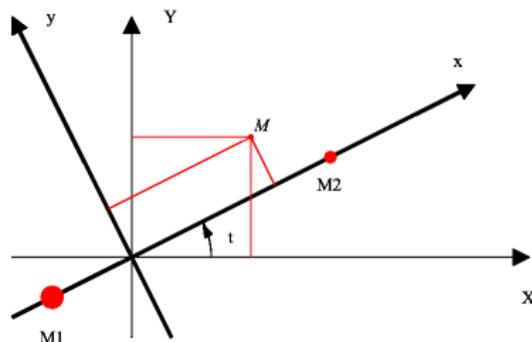


Figure: Le système de coordonnées dynamiques (x, y) effectue une rotation dans le sens trigonométrique relativement au système de coordonnées inertielles (X, Y) .

Dans le repère en rotation,

- ▶ la **Terre** est la primaire de masse $1 - \mu$ de coordonnées $(-\mu, 0)$;
- ▶ la **Lune** est la primaire de masse μ de coordonnées $(1 - \mu, 0)$;
- ▶ **Equations du mouvement du satellite**

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - x = \frac{\partial V}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y = \frac{\partial V}{\partial y} \end{cases}$$

où $-V$ est le potentiel du système défini par

$$V = \frac{1 - \mu}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3}$$

avec

$$\varrho_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad \varrho_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}.$$

- ▶ Le problème admet 5 **points d'équilibre**
 - ▶ Les points L_1 , L_2 et L_3 et situés sur l'axe $y = 0$;
 - ▶ Les points L_4 et L_5 équilatéraux.

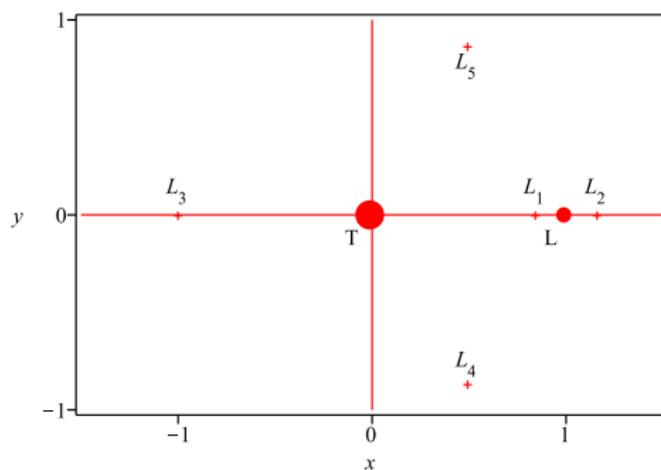


Figure: Points d'équilibre du système Terre-Lune

On considère désormais l'action de la **force de propulsion** $u = (u_1, u_2)$ du moteur sur le mouvement du satellite. On obtient le **système de contrôle**

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - x = \frac{\partial V}{\partial x} + u_1 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y = \frac{\partial V}{\partial y} + u_2 \end{cases}$$

qui décrit la **dynamique contrôlée** du satellite.

En posant $q = (x, y, \dot{x}, \dot{y})$, on le réécrit sous forme du **système de contrôle bi-entrée**

$$\dot{q} = F_0(q) + F_1(q)u_1 + F_2(q)u_2$$

avec

$$F_0(q) = \begin{pmatrix} q_3 \\ q_4 \\ 2q_4 + q_1 - (1 - \mu) \frac{q_1 + \mu}{((q_1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \mu \frac{q_1 - 1 + \mu}{((q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -2q_3 + q_2 - (1 - \mu) \frac{q_2}{((q_1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} - \mu \frac{q_2}{((q_1 - 1 + \mu)^2 + q_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix},$$

$$F_1(q) = \frac{\partial}{\partial q_3}, \quad F_2(q) = \frac{\partial}{\partial q_4}.$$

Objectif : Calculer une trajectoire minimisant le temps de transfert entre l'orbite géostationnaire \mathcal{O}_G et une orbite de mise à poste circulaire \mathcal{O}_L centrée sur la Lune lorsque l'on applique une poussée faible.

i.e calculer une solution numérique du **problème de contrôle optimal**

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \dot{q} = F_0(q) + \epsilon(F_1(q)u_1 + F_2(q)u_2), \epsilon > 0 \\ \min_{u(\cdot) \in B_{\mathbb{R}^2}(0,1)} \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt \\ q(0) \in \mathcal{O}_G, \quad q(t_f) \in \mathcal{O}_L. \end{array} \right.$$

- ▶ Condition de **maximisation** \Rightarrow si $(H_1, H_2) \neq 0$, on a

$$u_i = \frac{H_i}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2}}, \text{ avec } H_i(q, p) = \langle p, F_i(q) \rangle .$$

- ▶ Cas **normal** \Rightarrow la trajectoire recherchée est la projection d'une **trajectoire extrémale** solution du système différentiel Hamiltonien

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H_r}{\partial p}(q(t), p(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H_r}{\partial q}(q(t), p(t))$$

que l'on réécrit

$$\dot{z}(t) = \vec{H}_r(z(t))$$

avec $z = (q, p)$ et où H_r est le **Hamiltonien réduit**

$$H_r(q, p) = -1 + H_0(q, p) + \sqrt{(H_1^2(q, p) + H_2^2(q, p))}.$$

- ▶ Le problème consiste donc à **calculer numériquement** ces extrémales et à tester leur optimalité.

On considère l'**application exponentielle**

$$\exp_{q_0,t}(p(0)) \longrightarrow \Pi_q(z(t, z_0)) = q(t, q_0, p_0)$$

où $z(t, z_0)$, avec $z(0) = (q(0), p(0))$, est la trajectoire extrémale vérifiant $z(0, z_0) = z_0$.

Définition

Un point $q(t_c)$ est dit **géométriquement conjugué** à q_0 si l'application \exp_{q_0,t_c} **n'est pas une immersion** en p_0 .

Théorème (fondamental)

Soit t_c^1 le **premier temps conjugué géométrique** le long de z . La trajectoire $q(\cdot)$ est **localement optimale** sur $[0, t_c^1)$ pour la topologie de L^∞ ; si $t > t_c^1$ alors la trajectoire $q(\cdot)$ **n'est pas localement optimale** sur $[0, t]$.

On exprime les conditions limites sous la forme

$$R(z(0), z(t_f)) = 0$$

⇒ les trajectoires extrémales $z(t) = (q(t), p(t))$ recherchées sont solutions du **problème aux 2 bouts**

$$\begin{cases} \dot{z} = \vec{H}_r(z(t)) \\ R(z(0), z(t_f)) = 0. \end{cases}$$

La condition initiale q_0 étant fixée, l'objectif est de déterminer un zéro de la **fonction de tir E**

$$E : p_0 \longrightarrow R(z_0, z_{t_f})$$

⇒ utilisation de la méthode **méthode de Newton**.

Problème : On doit disposer d'une bonne approximation du zéro recherché pour que la méthode de Newton converge.

Idee : Considérer H_r comme l'élément H_1 d'une famille $(H_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ de Hamiltoniens lisses

\Rightarrow on construit une famille à un paramètre $(E_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ de fonctions de tir telle que l'équation associée à E_0 soit facile à résoudre.

Schéma :

1. Pour $\lambda = 0$, on calcule l'extrémale $z_0(t)$ sur $[0, t_f]$ issue de $z_0(0) = (q_0, p_0^0)$ grâce à la méthode de tir.
2. On choisit une discrétisation $0 = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N = 1$ telle que l'équation de tir soit résolue en λ_{i+1} grâce à la solution en λ_i .
3. On construit une famille p_0^0, \dots, p_0^N de zéros des fonctions $E_{\lambda_0}, \dots, E_{\lambda_N}$.

La justification théorique de la méthode de continuation repose sur le résultat suivant.

Théorème

Pour chaque λ , la fonction exponentielle \exp_{q_0, t_f}^λ est de **rang maximal** ssi le point $q_1 = \exp_{q_0, t_f}^\lambda(p(0))$ n'est pas conjugué à q_0 . De plus, les solutions de l'équation de tir paramétrée contiennent une **courbe lisse** qui peut être paramétrée par λ .

Idée : Pour déterminer des extrémales à temps minimal, on utilise une continuation sur le paramètre ϵ .

Justification : Plus la poussée est **forte**, plus le temps de transfert est **court** et la méthode de tir **facile** à initialiser.

Optimalité : vérifiée grâce aux conditions du second ordre.

2 cas :

- ▶ Transferts Terre- L_1 i.e première phase du transfert Terre-Lune. Continuation initialisée car la méthode tir converge à poussée forte .
- ▶ Transferts Terre-Lune. Continuation initialisée en utilisant l'extrémale Terre- L_1 .

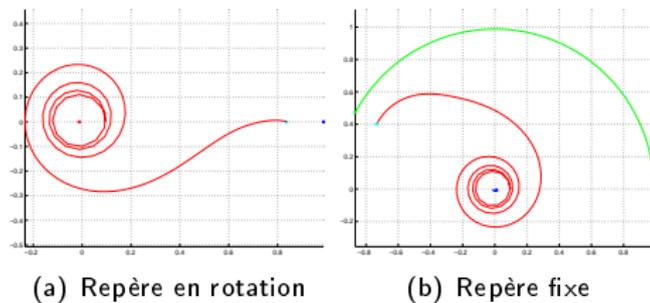


Figure: $\epsilon = 1$

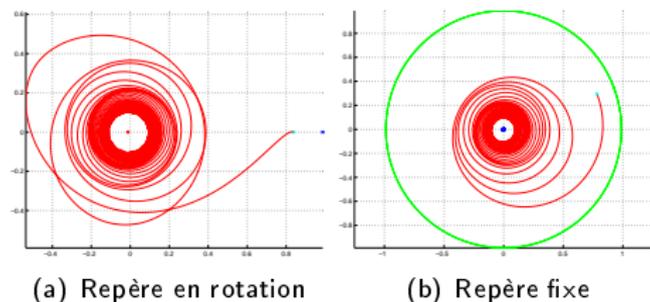


Figure: $\epsilon = 0.08$

Trajectoires Terre-Lune à temps minimal

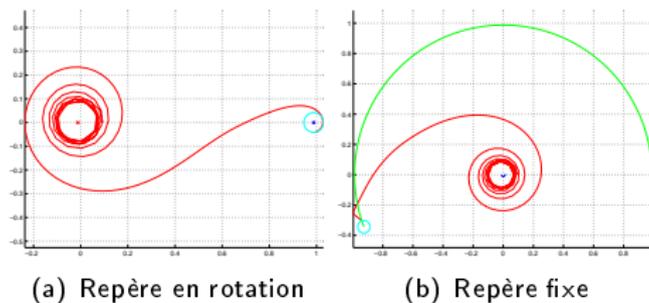


Figure: $\epsilon = 1$

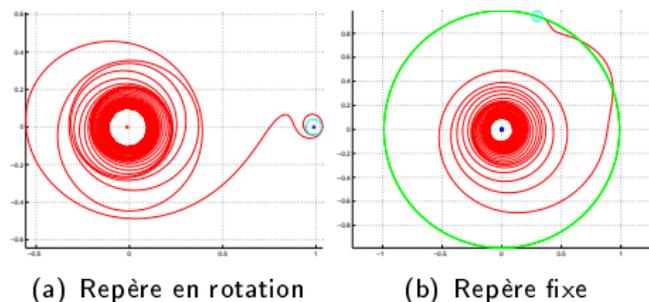


Figure: $\epsilon = 0.08$

Objectif : Atteindre l'orbite de mise à poste circulaire \mathcal{O}_L centrée sur la Lune depuis l'orbite géostationnaire \mathcal{O}_G en minimisant le coût L^2 du contrôle u le long du transfert.

i.e résoudre le **problème de contrôle optimal**

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \dot{q} = F_0(q) + F_1(q)u_1 + F_2(q)u_2 \\ \min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}^2} \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 dt \\ q(0) \in \mathcal{O}_G, \quad q(t_f) \in \mathcal{O}_L. \end{cases}$$

PMP

- ▶ Condition de **maximisation** $\Rightarrow u_i = H_i$.
- ▶ Cas **normal** \Rightarrow la trajectoire recherchée est la projection d'une extrémale solution du système

$$\dot{z}(t) = \overrightarrow{H_r}(z(t))$$

avec

$$H_r(z) = H_0(z) + \frac{1}{2}(H_1^2(z) + H_2^2(z)).$$

Idée : Utiliser une continuation sur le paramètre μ .

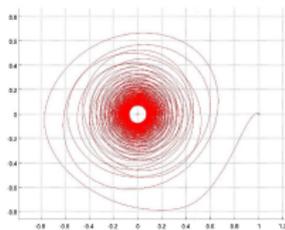
Justification : On relie ainsi les trajectoires du problème de Kepler (intégrable) aux trajectoires du problème des 3 corps restreint.

Optimalité : vérifiée grâce aux conditions du second ordre.

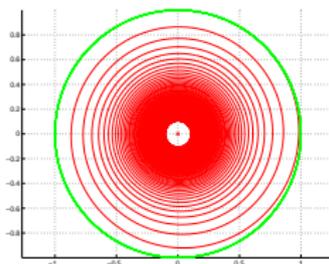
2 cas :

- ▶ Transferts Terre- L_1 i.e première phase du transfert Terre-Lune. Continuation initialisée grâce à une solution du problème de Kepler.
- ▶ Transferts Terre-Lune. Continuation initialisée en utilisant l'extrémale Terre- L_1 .

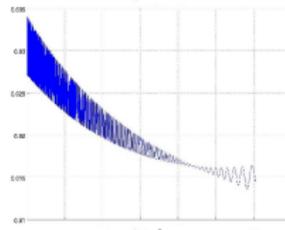
Trajectoires Terre- L_1 à énergie minimale



(a) Repère en rotation

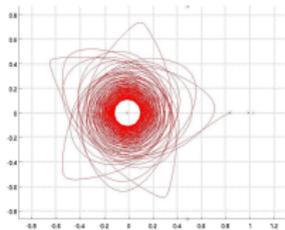


(b) Repère fixe

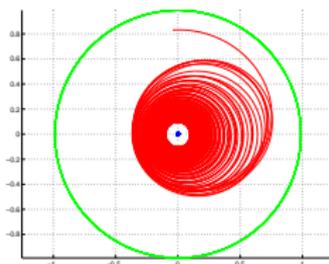


(c) Norme du contrôle

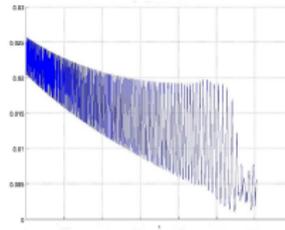
Figure: $\mu=0$



(a) Repère en rotation



(b) Repère fixe



(c) Norme du contrôle

Figure: $\mu = 1.2153e - 2$

Trajectoires Terre-Lune à énergie minimale

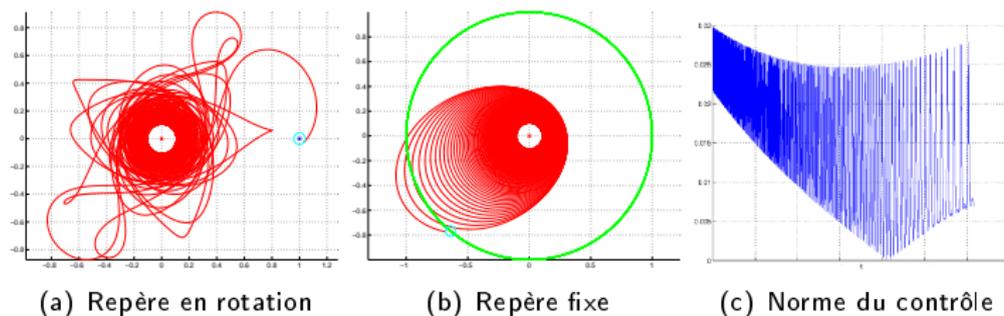


Figure: $\mu=0$

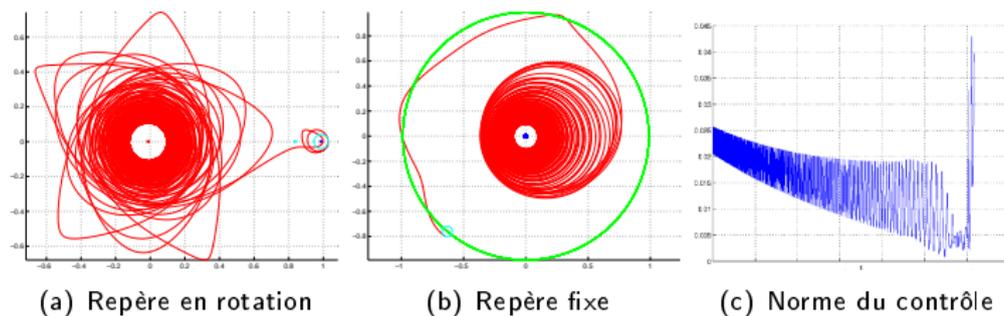


Figure: $\mu = 1.2153e - 2$

Principe : Approximer le transfert Terre-Lune à énergie minimale en le **découpant** en 3 phases :

- ▶ Phase 1 : transfert entre 2 orbites **keplériennes** dans la zone d'attraction terrestre, **conservation** de l'argument du périégée ;
- ▶ Phase 2 : passage au **voisinage du point L_1** où les influences terrestre et lunaire se compensent ;
- ▶ Phase 3 : transfert entre 2 orbites **keplériennes** dans la zone d'attraction lunaire.

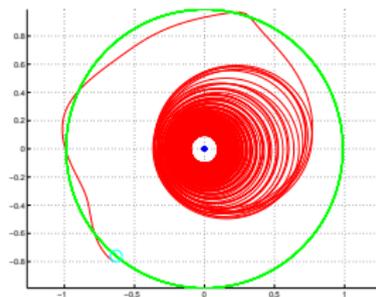


Figure: Transfert Terre-Lune à énergie minimale

Transfert Keplerien dans le champ d'attraction terrestre

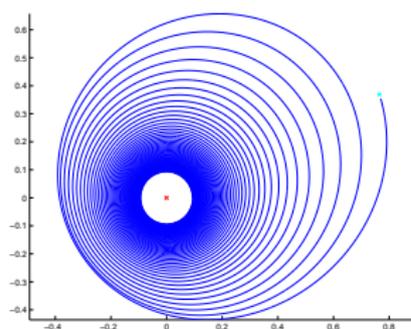
La première phase du transfert est comparable à un transfert **keplerien** de l'orbite géostationnaire vers l'orbite décrite par les éléments orbitaux

$$a = 6.11e - 1, e = 4e - 1, \theta = 6\pi/5.$$

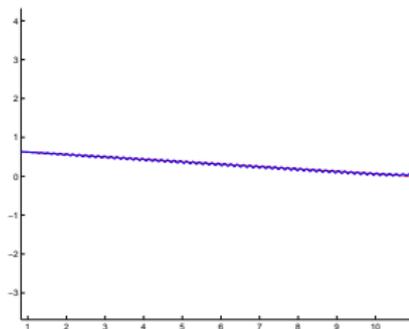
Remarque : L'argument du périégée θ est donc **préservé** le long du transfert.

⇒ Approximation par **moyennation** de la trajectoire optimale,

Utilisation des **coordonnées plates** dans lesquelles les trajectoires optimales sont des **droites**.



(a) Première phase du transfert



(b) Comparaison avec la trajectoire moyennée

Le mouvement du satellite est décrit par l'équation linéarisée de la dynamique contrôlée des trois corps plan au voisinage de L_1

$$\dot{q} = Aq + Bu.$$

Principe du maximum

$$\Rightarrow u^*(t) = B^T p^*(t)$$

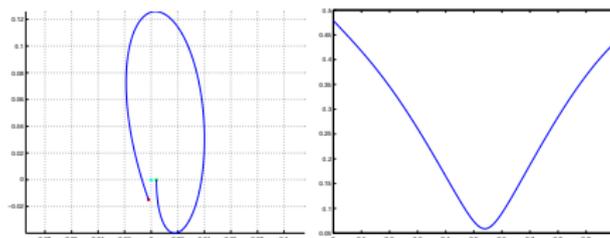
et le couple (q^*, p^*) est solution du système

$$\dot{q} = Aq + BB^T p, \quad \dot{p} = -A^T p.$$

Variation de la constante

$$\Rightarrow p_0^* = \left[\int_0^{t_f} \exp^{-As} BB^T \exp^{-A^T s} ds \right]^{-1} (\exp^{-A^T t_f} q_f - q_0)$$

\Rightarrow calcul de la trajectoire optimale par intégration numérique.



(c) Trajectoire linéarisée (d) Norme du contrôle

La troisième phase consiste à transférer le satellite de l'orbite définie par

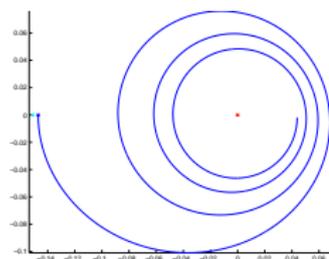
$$a = 1.05e - 1, \quad e = 4e - 1, \quad \theta = 0$$

jusqu'à l'orbite **circulaire** centrée sur la Lune.

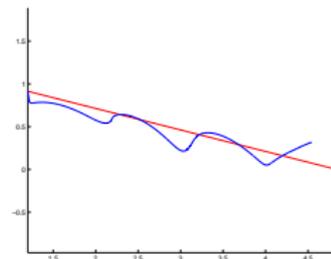
Remarque : On **impose** la préservation de l'argument du périégée θ le long du transfert.

⇒ On reproduit la méthode employée pour approximer la première phase du transfert,

Technique de moyennation, coordonnées plates.



(e) Troisième phase



(f) Comparaison avec la trajectoire moyennée

- ▶ Moyennation appropriée pour simuler les phases 1 et 3 ;
- ▶ Poussée maximale de l'ordre de $0.4N$ au voisinage de L_1 .

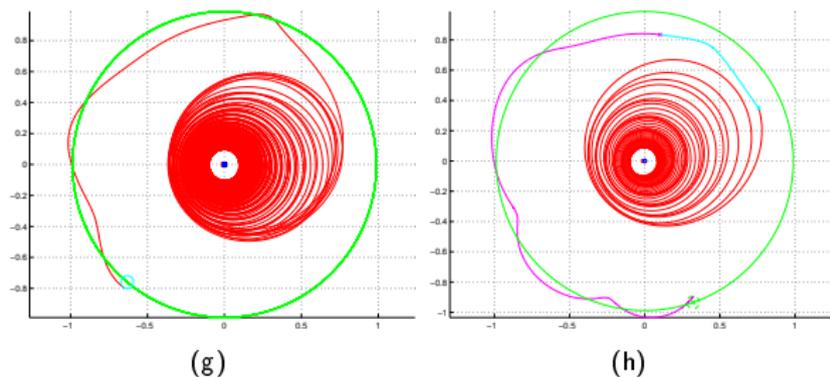


Figure: Comparaison des trajectoires réelles et recolées

On considère le problème des 3 corps restreint **spatial** :

- ▶ L_1 est l'origine des coordonnées ;
- ▶ $\gamma = d(L_1, \text{Lune})$ est l'unité de distance.

⇒ **Equations du mouvement** :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + c_2)x = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y = \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \\ \ddot{z} + c_2 z = \frac{\partial}{\partial z} \sum_{n \geq 3} c_n \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right) \end{cases}$$

avec P_n le **n-ième polynôme de Legendre** et

$$c_n(\mu) = \gamma^{-3} (\mu + (-1)^n (1 - \mu)) \left(\frac{\gamma}{1 - \gamma}\right)^{n+1}$$
$$\rho = x^2 + y^2 + z^2.$$

Equations du mouvement linéarisées :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - (1 + c_2)x = 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + (c_2 - 1)y = 0 \\ \ddot{z} + c_2z = 0. \end{cases}$$

Posons $p_x = \dot{x} - y$, $p_y = \dot{y} + x$ et $p_z = \dot{z}$

⇒ **Formalisme hamiltonien** des équations linéarisées

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y + c_2(-x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}).$$

On applique une **transformation symplectique** A

⇒ **Forme normale**

$$H = \lambda_1 q_1 p_1 + \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2).$$

La **région d'équilibre** \mathcal{R} est déterminée par

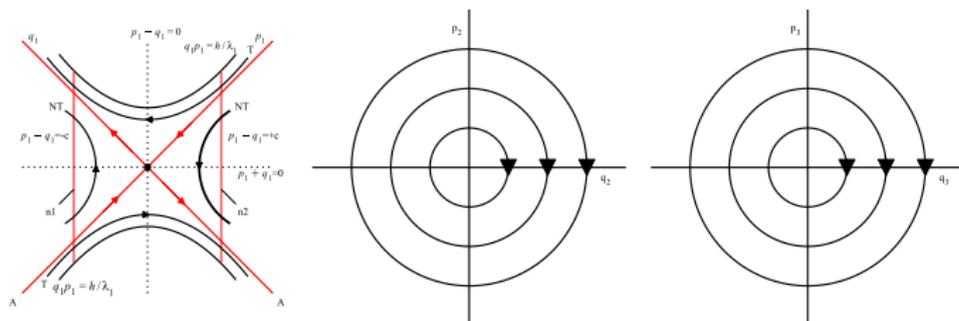
$$H = h, \text{ et } |p_1 - q_1| \leq c$$

avec h et c deux constantes positives

\Rightarrow pour chaque $p_1 - q_1 \in [-c, c]$, l'égalité $H = h$ détermine la 4-sphère

$$\frac{\lambda}{4}(q_1 + p_1)^2 = h + \frac{\lambda}{4}(p_1 - q_1)^2 - \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2^2) - \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2)$$

$\Rightarrow \mathcal{R}$ est homéomorphe au produit d'une 4-sphère et d'un intervalle.



(a) projection sur (q_1, p_1) (b) projection sur (q_2, p_2) (c) projection sur (q_3, p_3)

Figure: Flot dans la région d'équilibre. (a) Projection des orbites sur le plan (q_1, p_1) . Le point central représente la 3-sphère d'orbites périodiques et quasi-périodiques. Les droites A et les branches d'hyperboles T et NT sont les projections des orbites asymptotiques, de transit et de non-transit. (b) Projection de l'oscillateur harmonique sur le plan (q_2, p_2) . (c) Projection de l'oscillateur harmonique sur le plan (q_3, p_3) .

Projection sur le plan $q_1 p_1 \Rightarrow$ structure de **variétés invariantes**

$$W_+^s(S_h^3) = \{q_1 = 0, p_1 \neq 0, \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2)^2 + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h\}$$

$$W_+^u(S_h^3) = \{q_1 \neq 0, p_1 = 0, \frac{\omega_1}{2}(q_2^2 + p_2)^2 + \frac{\omega_2}{2}(q_3^2 + p_3^2) = h\}.$$

Equations du mouvement contrôlé :

$$\dot{z} = Az + Bu$$

avec $z = (q, p)$ et

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1}{s_1} & \frac{\lambda_1^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & 0 \\ \frac{2\omega_1}{s_2} & \frac{-\omega_1^2 - 2c_2 - 1}{s_2} & 0 \\ \frac{\lambda_1^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\lambda_1}{s_1} & \frac{\lambda_1^2 - 2c_2 - 1}{s_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega_1^2 - 2c_2 - 1}{s_1} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} \end{pmatrix}.$$

Objectif : Atteindre la branche positive de la variété instable $W_+^u(S_h^3)$ depuis la branche positive de la variété stable $W_+^s(S_h^3)$ en minimisant le coût énergétique du contrôle le long du transfert

i.e résoudre le problème de contrôle optimal

$$(\mathcal{P}') \begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ \min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}^3} \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 dt \\ z(0) \in W_+^s(S_h^3), \quad z(t_f) \in W_+^u(S_h^3). \end{cases}$$

Principe du maximum dans le cas linéaire quadratique

Il existe un **unique** contrôle optimal u^* ; la réponse optimale z^* et le vecteur adjoint correspondant η^* sont solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = Az + BB^T \eta^T \\ \dot{\eta} = -\eta A \\ z(0) = z_0 \in W_+^s(S_h^3), z(t_f) \in \partial W_+^u(S_h^3) \\ \eta(t_f) \text{ est intérieur et normal à } W_+^u(S_h^3) \text{ en } z(t_f) \end{array} \right.$$

et u^* est donné par

$$u^*(t) = U^{-1} B^T \eta^T(t).$$

On résout le système $\Rightarrow \begin{pmatrix} z(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = \exp^{tC} \begin{pmatrix} z_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}$ avec

$$C = \begin{pmatrix} A & BB^T \\ 0 & -A^T \end{pmatrix}.$$

Le contrôle optimal s'écrit

$$u^*(t) = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda_1}{s_1} (\eta_{q_1}^0 e^{-\lambda_1 t} + \eta_{p_1}^0 e^{\lambda_1 t}) - \frac{2\omega_1}{s_2} (\eta_{q_2}^0 \cos(\omega_1 t) + \eta_{p_2}^0 \sin(\omega_1 t)) \\ \frac{\lambda_1^2 - 2c_2 - 1}{s_1} (-\eta_{q_1}^0 e^{-\lambda_1 t} + \eta_{p_1}^0 e^{\lambda_1 t}) - \frac{\omega_1^2 + 2c_2 + 1}{s_2} (\eta_{p_2}^0 \cos(\omega_1 t) - \eta_{q_2}^0 \sin(\omega_1 t)) \\ \frac{1}{\sqrt{\omega_2}} (\eta_{p_3}^0 \cos(\omega_2 t) - \eta_{q_3}^0 \sin(\omega_2 t)) \end{pmatrix}.$$

Le contrôle optimal u^* est un **contrôle feedback** donné par

$$u = U^{-1}B^T E(t)z(t)$$

où E est solution de l'**équation matricielle de Riccati**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{E} = -A^T E - EA - EBb^T E \\ E(t_f) = Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

où $U = Id_{\mathbb{R}^6}$. Ceci découle du fait que η^* satisfait la condition finale

$$\eta(t_f) = -z^T(t_f)Q.$$

\Rightarrow on fixe $z^*(0)$ puis on pratique une **intégration rétrograde** de l'équation matricielle de Riccati pour calculer l'état adjoint initial $\eta^*(0)$ associé à la réponse optimale.

On garde la notation $z = (q, p)$

⇒ le problème s'écrit

$$(\mathcal{P}'') \begin{cases} \dot{z} = F_0(z) + \sum_{i=1}^3 u_i F_i(z) \\ \min_{u(\cdot) \in \mathbb{R}^3} \int_{t_0}^{t_f} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 dt \\ z(0) \in W_\alpha^s(S_h^3), \quad z(t_f) \in W_\alpha^u(S_h^3) \end{cases}$$

avec

$$F_0(z) = \begin{pmatrix} p_1 + q_2 \\ p_2 - q_1 \\ \rho_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} \sum_{n \geq 2} c_n \rho^n P_n\left(\frac{q_1}{\rho}\right) + p_2 - q_1 \\ \frac{\partial}{\partial q_2} \sum_{n \geq 2} c_n \rho^n P_n\left(\frac{q_1}{\rho}\right) - p_1 - q_2 \\ \frac{\partial}{\partial q_3} \sum_{n \geq 2} c_n \rho^n P_n\left(\frac{q_1}{\rho}\right) \end{pmatrix}, \quad F_i(z) = \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

- ▶ le couple (z, η) est solution du **système Hamiltonien** associé au **hamiltonien réduit**

$$H_r(z, \eta) = H_0(z, \eta) + \frac{1}{2}(\eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2) ;$$

- ▶ On doit obtenir la **condition de transversalité finale**

$$\eta(t_f) \perp T_{z(t_f)} W_\alpha^u(S_h^3) ;$$

- ▶ Les conditions finales $z(t_f) \in W_\alpha^u(S_h^3)$ et $\eta(t_f) \perp T_{z(t_f)} W_\alpha^u(S_h^3)$ s'expriment $\gamma(z(t_f)) = 0$ avec

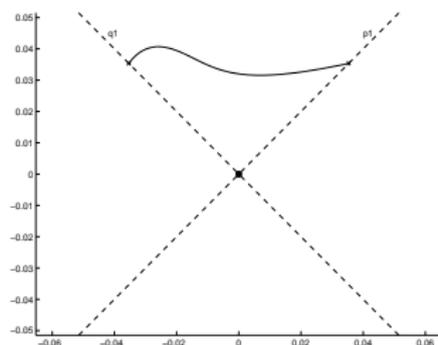
$$\gamma : x \in \mathbb{R}^{12} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - \alpha \\ x_4 \\ \frac{\omega_1}{2}(x_2^2 + x_5^2) + \frac{\omega_2}{2}(x_3^2 + x_6^2) - h \\ \langle (x_7, \dots, x_{12}), h_1 \rangle \\ \langle (x_7, \dots, x_{12}), h_2 \rangle \\ \langle (x_7, \dots, x_{12}), h_3 \rangle \end{pmatrix}$$

avec $T_{z(t_f)} W_\alpha^u(S_h^3) = \text{Vect}\{h_1, h_2, h_3\}$;

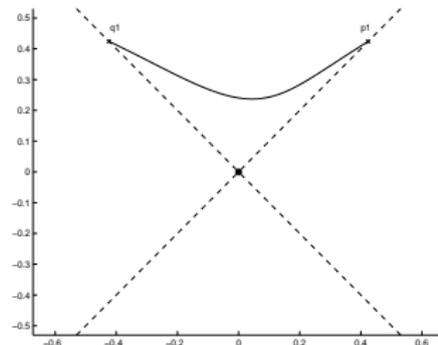
- ▶ La fonction γ permet de définir la **fonction de tir** associée au problème.

- ▶ On initialise la méthode de tir grâce à la condition initiale (z_0^*, η_0^*) du problème de contrôle linéarisé
- ⇒ On calcule les extrémals du problème de la minimisation du coût énergétique entre les variétés invariantes.

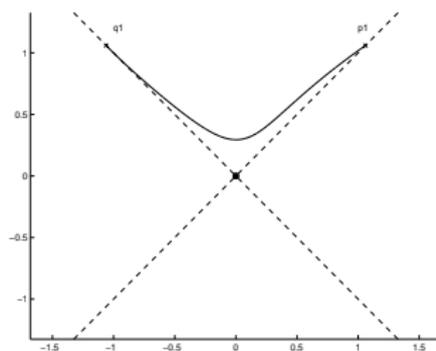
Projections des trajectoires extrémales sur le plan p_1q_1 .



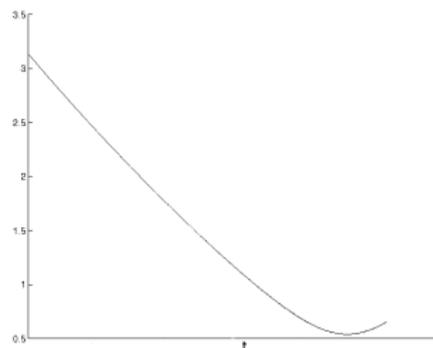
(a) $\alpha = 0.05$



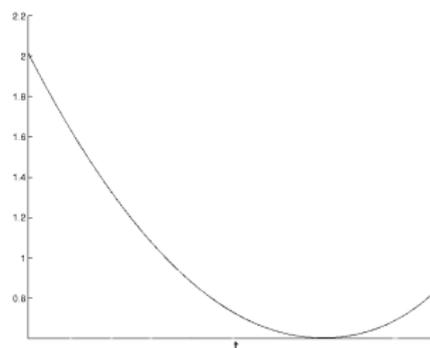
(b) $\alpha = 0.6$



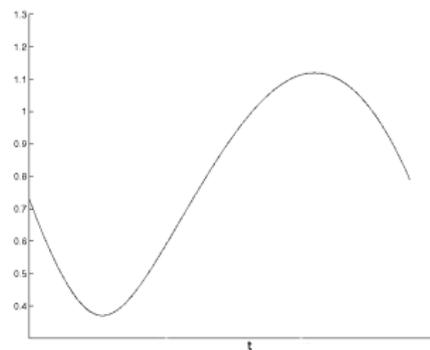
(c) $\alpha = 1.5$



(d) $\alpha = 0.05$



(e) $\alpha = 0.6$



(f) $\alpha = 1.5$

- ▶ **Premières** applications de méthodes numériques indirectes de contrôle optimal pour l'étude du problème des trois corps restreint;

- ▶ **Premières** applications de méthodes numériques indirectes de contrôle optimal pour l'étude du problème des trois corps restreint ;
- ▶ **Initialisations** de méthodes indirectes par différentes méthodes de continuation ;

- ▶ **Premières** applications de méthodes numériques indirectes de contrôle optimal pour l'étude du problème des trois corps restreint ;
- ▶ **Initialisations** de méthodes indirectes par différentes méthodes de continuation ;
- ▶ **Plusieurs collections de transferts à énergie minimale et temps minimal** dans le système Terre-Lune ;

- ▶ **Premières** applications de méthodes numériques indirectes de contrôle optimal pour l'étude du problème des trois corps restreint ;
- ▶ **Initialisations** de méthodes indirectes par différentes méthodes de continuation ;
- ▶ **Plusieurs collections de transferts à énergie minimale et temps minimal** dans le système Terre-Lune ;
- ▶ Utilisation des variétés invariantes pour le recollement ? **Intersections** des trajectoires de Kepler et des tubes invariants ?

- ▶ **Premières** applications de méthodes numériques indirectes de contrôle optimal pour l'étude du problème des trois corps restreint ;
- ▶ **Initialisations** de méthodes indirectes par différentes méthodes de continuation ;
- ▶ **Plusieurs collections de transferts à énergie minimale et temps minimal** dans le système Terre-Lune ;
- ▶ Utilisation des variétés invariantes pour le recollement ? **Intersections** des trajectoires de Kepler et des tubes invariants ?
- ▶ Recollement **optimaux** ? Principe du maximum hybride ? Conditions de saut sur le vecteur adjoint ?

- ▶ **Premières** applications de méthodes numériques indirectes de contrôle optimal pour l'étude du problème des trois corps restreint ;
- ▶ **Initialisations** de méthodes indirectes par différentes méthodes de continuation ;
- ▶ **Plusieurs collections de transferts à énergie minimale et temps minimal** dans le système Terre-Lune ;
- ▶ Utilisation des variétés invariantes pour le recollement ? **Intersections** des trajectoires de Kepler et des tubes invariants ?
- ▶ Recollement **optimaux** ? Principe du maximum hybride ? Conditions de saut sur le vecteur adjoint ?
- ▶ Recollement et moyennation à **temps minimal** ?

- ▶ **Premières** applications de méthodes numériques indirectes de contrôle optimal pour l'étude du problème des trois corps restreint ;
- ▶ **Initialisations** de méthodes indirectes par différentes méthodes de continuation ;
- ▶ **Plusieurs collections de transferts à énergie minimale et temps minimal** dans le système Terre-Lune ;
- ▶ Utilisation des variétés invariantes pour le recollement ? **Intersections** des trajectoires de Kepler et des tubes invariants ?
- ▶ Recollement **optimaux** ? Principe du maximum hybride ? Conditions de saut sur le vecteur adjoint ?
- ▶ Recollement et moyennation à **temps minimal** ?

...de votre attention !

- B. Bonnard, J.B. Caillau and G. Picot Geometric and numerical techniques in optimal control of the two and three body problems, *Commun. Inf. Syst*, **10** (2010).
- B. Bonnard, J.-B. Caillau and E. Trélat. Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control. *ESAIM Control Optim. and Calc. Var.* **13** (2007), no. 2, 207-236 (apo.enseeiht.fr/cotcot).
- G. Gómez, S.Koon, M. Lo, J.E Marsden, J. Madesmont and S.D. Ross. Invariants manifolds, the spatial three-body problem and space mission design. *Adv. Astronaut. Sci* **109** (2001), 3-22.
- W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden and S. D. Ross, Dynamical systems, the Three-Body problem, and space mission design. Springer, 2007.
- G. Picot, Shooting and numerical continuation methods for computing time-minimal and energy-minimal trajectories in the Earth-Moon system using low-propulsion, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, to appear.
- G. Picot, Energy minimal transfers in the vicinity of the Lagrangian point L_1 , submitted to *AIMS proceedings of the 8th AIMS CDSDEA*, 2010.