Two-Aircraft Optimal Control Problem. The in-flight noise reduction

F. Nahayo

En collaboration avec M. Haddou, S. Khardi et M. Hamadiche

SMAI 2011, 23 mai-27 mai 2011

Modélisation mathématique..... (1)

- Deux avions de même type (Airbus A3XX) doivent attérir successivement sur une seule piste d'un aéroport donné.
- Le mouvement 3-D de chaque avion s'analyse à l'aide de trois repères : Le repère terrestre R_o, le repère aérodynamique R_a, le repère avion R_b.
- Lois générales et équations de mouvement :

$$\begin{array}{l} \sum \overrightarrow{F}_{ext_i} - \frac{dm_i}{dt}\overrightarrow{V_{a_i}} = \frac{m_i d\overrightarrow{V}_{a_i}}{dt} \\ \sum \overrightarrow{M}_{ext_{G_i}} = \frac{d}{dt}[I_{G_i}\overrightarrow{\Omega}_i] \end{array} \quad (1)$$

où $i = 1, 2$ est l'indice avion.

La dérivation de $\overrightarrow{X}$ est donnée par

$$\frac{d\overrightarrow{X}}{dt}|_{R_O} = \frac{d\overrightarrow{X}}{dt}_{R_a} + \overrightarrow{\Omega}_{R_a/R_O} \times \overrightarrow{X}$$

IFSTTAR

Modélisation mathématique..... (2)

Quelques hypothèses de simplification

1. Le vent est constant.
2. Les coordonnées moteur sont négligées.
3. L'accélération complémentaire de chaque avion est négligée.
4. Sous les différentes simplifications et moyenant quelques transformations mathématiques, les équations générales de mouvement de l'avion i prennent la forme suivante.

Modélisation mathématique..... (3)

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_{a_i} &= \frac{1}{m_i}[-m_i g sin\gamma_{a_i} - \frac{1}{2}\rho S V_{a_i}^2 C_D \\
&+(cos\alpha_{a_i} cos\beta_{a_i} + sin\beta_{a_i} + sin\alpha_{a_i} cos\beta_{a_i})F_{x_i} - \frac{dm_i}{dt}u_i] \\
\dot{\beta}_{a_i} &= \frac{1}{m_i V_{a_i}}[m_i g cos\gamma_{a_i} sin\mu_{a_i} + \frac{1}{2}\rho S V_{a_i}^2 C_{y_i} \\
&+[-cos\alpha_{a_i} sin\beta_{a_i} + cos\beta_{a_i} - sin\alpha_{a_i} sin\beta_{a_i}]F_{y_i} - \frac{dm_i}{dt}v_i] \\
\dot{\alpha}_{a_i} &= \frac{1}{m_i V_{a_i} cos\beta_{a_i}}[m_i g cos\gamma_{a_i} cos\mu_{a_i} - \frac{1}{2}\rho S V_{a_i}^2 C_{L_i} \\
&+[-sin\alpha_{a_i} + cos\alpha_{a_i}]F_{z_i} - \frac{dm_i}{dt}w_i] \\
\dot{p}_i &= \frac{C}{AC-E^2}\{r_i q_i(B-C) - E p_i q_i + \frac{1}{2}\rho S l V_{a_i}^2 C_{l_i}\} \\
&+\frac{E}{AC-E^2}\{p_i q_i(A-B) - E r_i q_i + \frac{1}{2}\rho S l V_{a_i}^2 C_{ni} \\
\dot{q}_i &= \frac{1}{B}\{-r_i p_i(A-C) - E(p_i^2 - r_i^2) + \frac{1}{2}\rho S l V_{a_i}^2 C_{mi}\}
\end{aligned}
$$

Modélisation mathématique..... (4)

$$\begin{aligned}
\dot{r}_i &= \frac{E}{AC-E^2}\{r_i q_i(B-C) + E p_i q_i + \frac{1}{2}\rho S l V_{a_i}^2 C_{l_i} \\
&\quad + \frac{A}{AC-E^2}\{p_i q_i(A-B) - E r_i q_i + \frac{1}{2}\rho S l V_{a_i}^2 C_{ni}\} \\
\dot{X}_{G_i} &= V_{a_i} cos\gamma_{a_i} cos\chi_{a_i}, \\
\dot{Y}_{G_i} &= V_{a_i} cos\gamma_{a_i} sin\chi_{a_i}, \\
\dot{Z}_{G_i} &= -V_{a_i} sin\gamma_{a_i} \\
\dot{\phi}_i &= p_i + q_i sin\phi_i tan\theta_i + r_i cos\phi_i tan\theta_i, \\
\dot{\theta}_i &= q_i cos\phi_i - r_i sin\phi_i \\
\dot{\psi}_i &= \frac{sin\phi_i}{cos\theta_i} q_i + \frac{cos\phi_i}{cos\theta_i} r_i, \\
\dot{m}_i &= \frac{-2.01\times 10^{-5}(\Phi-\mu_i-\frac{K_i}{\eta_C})\sqrt{\Theta}}{\sqrt{5\eta_n(1+\eta_{tf_i}\lambda)}\sqrt{G_i+0.2M_i^2\frac{\eta_{d_i}}{\eta_{tf_i}}\lambda-(1-\lambda)M_i}} P_0 \delta_{xi}\frac{\rho_i}{\rho_0}(1-M_i+\frac{M_i^2}{2})
\end{aligned} \tag{2}$$

Modélisation mathématique..... (5)

- m_i est la masse de l'avion , variable à cause de la consommation du carburant.
- Transformation du système (2) en fonction d'état, la dynamique de l'avion s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}_i(t)}{dt} &= \mathbf{f}_i(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)), i = 1, 2 \\ & \forall t \in [0, T], \mathbf{y}_i(0) = \mathbf{y}_{i0} \end{aligned} \tag{3}$$

Modélisation mathématique..... (6)

Fonction coût, cas d'un seul avion

$$SEL = 10log\left[\frac{1}{t_o}\int_{t_{10}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A1,dt}(t)}dt\right] \quad \forall t \in [t_{10}, t_{1f}] \tag{4}$$

Modélisation mathématique..... (7)

- Modélisation de la fonction coût, cas de deux avions sans retard :

$$
\begin{aligned}
SEL_1 &= 10 log \left[\frac{1}{t_o}\int_{t_{10}}^{t_{20}} 10^{0.1L_{A1,dt}(t)}dt\right], t \in [t_{10}, t_{20}] \\
SEL_{12} &= SEL_{11} \oplus SEL_{21} \\
&= 10 \log[\frac{1}{t_o}\int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A1,dt}(t)}dt \\
&+ \frac{1}{t_o}\int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A2,dt}(t)}dt], t \in [t_{20}, t_{1f}] \\
SEL_2 &= 10 \log \left[\frac{1}{t_o}\int_{t_{1f}}^{t_{2f}} 10^{0.1L_{A2,dt}(t)}dt\right], t \in [t_{1f}, t_{2f}] \\
SEL_G &= \frac{(t_{20}-t_{10})SEL_1 \oplus (t_{1f}-t_{20})SEL_{12} \oplus (t_{2f}-t_{1f})SEL_2}{t_{2f}-t_{10}} \\
&= 10 \log\{\frac{1}{t_{2f}-t_{10}}[(t_{20}-t_{10})\int_{t_{10}}^{t_{20}} 10^{0.1L_{A1}(t)}dt \\
&+ (t_{1f}-t_{20})\int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A1}(t)}dt + (t_{1f}-t_{20})\int_{t_{20}}^{t_{1f}} 10^{0.1L_{A2}(t)}dt \\
&+ (t_{2f}-t_{1f})\int_{t_{1f}}^{t_{2f}} 10^{0.1L_{A2}(t)}dt,]\}, t \in [t_{10}, t_{2f}]
\end{aligned} \tag{5}
$$

SEL_G bruit de deux avions et $\oplus$ signifie l'addition acoustique.

Modélisation mathématique..... (8)

- Les nivaux de bruit de l'avion au point d'observation : $L_{Ai}(t) = L_{Ref} - 20log_{10}R + \Delta_{atm} + \Delta_{ground} + \Delta_v + \Delta_f$,
- soit $L_{Ai}(t) = 141 + 10\log\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^w + 10\log\left(\frac{V_e}{c}\right)^{7.5} +$

$$10\log s_1 + 3\log\left(\frac{2s_1}{\pi d_1^2} + 0.5\right) + 5\log\frac{\tau_1}{\tau_2} +$$

$$10\log\left[\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^{me} + 1.2\frac{\left(1 + \frac{s_2 v_2^2}{s_1 v_1^2}\right)^4}{\left(1 + \frac{s_2}{s_1}\right)^3}\right] - 20\log R + \Delta V +$$

$$10\log\left[\left(\frac{\rho}{\rho_{ISA}}\right)^2\left(\frac{c}{c_{ISA}}\right)^4\right]$$

Modélisation mathématique..... (9)

- v_1 vitesse de jet à l'entrée de la tuyère, v_2 vitesse de jet à la sortie de la tuyère, τ_1 température à l'entrée de la tuyère, τ_2 température à la sortie de la tuyère,
- ρ masse volumique de l'air, ρ_1 masse volumique atmosphérique à l'entrée de la tuyère, ρ_{ISA} masse volumique atmosphérique au sol,
- s_1 surface d'entrée de la tuyère hydraulique du moteur, s_2 surface de sortie de la tuyère hydraulique du moteur, d_1 diamètre d'entrée de la tuyère hydraulique du moteur,
- $V_e = v_1[1-(V/v_1)\cos(\alpha_p)]^{2/3}$ vitesse effective, α_p angle entre l'axe du moteur et l'axe de l'avion, R distance source-observateur,
- $w = \dfrac{3(V_e/c)^{3.5}}{0.6+(V_e/c)^{3.5}} - 1$ variable exposante, c vitesse du son (m/s),

Modélisation mathématique..... (10)

- me variable exposante, dépendant du type d'avion, $me = 1.1\sqrt{\frac{s_2}{s_1}}; \quad \frac{s_2}{s_1} < 29.7$, $me = 6.0; \quad \frac{s_2}{s_1} \geq 29.7$,
- $\Delta V = -15log(C_D(M_c, \theta)) - 10log(1 - Mcos\theta)$ convection Doppler
- $C_D(M_c, \theta) = [(1 + M_c cos\theta)^2 + 0.04M_c^2]$, M nombre de Mac de l'avion, $M_c = 0.62(v_1 - Vcos(\alpha_p))/c$ nombre de Mac de convection, θ angle d'émission.

Modélisation mathématique..... (11)

- La fonction objectif s'écrit

$$J : C^1((0,T),\mathbf{R^{13}}) \times C^1((0,T),\mathbf{R^4}) \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t) \longrightarrow J_{12}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) = \int_{t'} g(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t))dt$$

  où $J_{12}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.))$ est le niveau de bruit global de la formule (5).

- Résoudre un problème de commande optimale dans le cas du problème de deux avions en approche doit se faire dans des domaines de vol réalistes.
- Les procédures opérationnelles de vol doivent respecter certaines limites en rapport avec la sécurité de l'appareil, la vitesse et les modes opérationnelles de l'avion.

Modélisation mathématique..... (12)

- Modélisation de la fonction coût, cas du deuxième avion en retard de δ_t par rapport au premier :

$$
\begin{aligned}
J(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) &= \int_{t_0}^{t_0+\delta_t} 10^{0.1L_{A1}(t)}dt \\
J(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) &= \int_{t_0+\delta_t}^{t_f} [10^{0.1L_{A1}(t)} + 10^{0.1L_{A2}(t-\delta_t)}]dt \\
J(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) &= \int_{t_f}^{t_f+\delta_t} 10^{0.1L_{A2}(t-\delta_t)}dt
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

où $L_{A2}(t) = L_{A1}(t)$.

Modélisation mathématique..... (13)

- Les deux avions sont séparés moyenant : $\mathbf{X}^{12} = \mathbf{X}^2 - \mathbf{X}^1$ où $\mathbf{X}^1 = (X_{G1}, Y_{G1}, Z_{G1})$ et $\mathbf{X}^2 = (X_{G2}, Y_{G2}, Z_{G2})$.
- La vitesse doit être bornée comme suit : $1.13V_s \leq V_{a_i} \leq V_f$.
- Le contrôle de l'avion $\delta(t) = (\delta_{l_i}(t), \delta_{m_i(t)}, \delta_{n_i}(t), \delta_{x_i}(t))$ doit osciller entre la position maximale et minimale.
- La masse doit varier selon $m_o < m_i < m_f$, $i = 1, 2$.
- La formulation de toutes les contraintes :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i : \quad & \mathbf{R}^{13} \times \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^{17} \\ & (\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)) \longrightarrow \mathbf{k}_i(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)), \\ & \mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)) \leq 0, \\ & \mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y}_i(t), \mathbf{u}_i(t)) \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Modélisation mathématique..... (14)

- Mathématiquement, le problème de contrôle optimal se présente comme suit :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} J_{12}(\mathbf{y}(.),\mathbf{u}(.)) = \int_{t10}^{t_{2f}} g(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t))dt \\ \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t),\mathbf{u}(t)), t \in [t_{10}, t_{2f}] \\ \mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y},\mathbf{u},t) \leq 0, t_{10} = 0, \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_o, \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_o \\ \mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y},\mathbf{u},t) \geq 0, i = 1,2 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{1i}(\mathbf{y},\mathbf{u},t) = \quad & (\gamma_i - \gamma_{imax}, \chi_i - \chi_{imax}, V_i - V_{imax}, x_i - x_{imax}, \\ & y_i - y_{imax}, h_i - h_{imax}, \alpha_i - \alpha_{imax}, \\ & \delta_{xi} - \delta_{ximax}, \mu_i - \mu_{imax}, m_i - m_{imax}), \\ \mathbf{k}_{2i}(\mathbf{y},\mathbf{u},t) = \quad & (\gamma_i - \gamma_{imin}, \chi_i - \chi_{imin}, V_i - V_{imin}, x_i - x_{imin}, \\ & y_i - y_{imin}, h_i - h_{imin}, \alpha_i - \alpha_{imin}, \\ & \delta_{xi} - \delta_{ximin}, \mu_i - \mu_{imin}, m_i - m_{imin}). \end{aligned} \tag{9}$$

Démarche de discrétisation du problème de deux avions (1)

1. Subdiviser l'intervalle de temps $[t_{10}, t_{2f}]$,
   $h = t_{n+1} - t_n = \frac{t_f - t_0}{N}$, N nombre de discrétisation.
2. Pour $0 \leq n \leq N$,

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} J_{12}(\mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n) \\
&\mathbf{l}_1 = h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n, \mathbf{u}_n) \\
&\mathbf{l}_2 = h\mathbf{f}(t_n + \tfrac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \tfrac{\mathbf{l}_1}{2}, \mathbf{u}_n) \\
&\mathbf{l}_3 = h\mathbf{f}(t_n + \tfrac{h}{2}, \mathbf{y}_n + \tfrac{\mathbf{l}_2}{2}, \mathbf{u}_n) \\
&\mathbf{l}_4 = h\mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{l}_3, \mathbf{u}_n), \; t_{n+1} = t_n + h \\
&\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \tfrac{1}{6}(\mathbf{l}_1 + 2\mathbf{l}_2 + 2\mathbf{l}_3 + \mathbf{l}_4) \\
&\mu_1 \mathbf{k}_1(\mathbf{y}(t_n), \mathbf{u}(t_n)) = 0, \; \mu_2 \mathbf{k}_2(\mathbf{y}(t_n), \mathbf{u}(t_n)) = 0, \\
&\mu_1 \leq 0, \; \mu_2 \geq 0 \\
&\textit{Ecrire } t_{n+1} = t_n + h, \mathbf{y}_{n+1}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

3. Arrêt.

Démarche de résolution du problème de deux avions (2)

- Une methode de type SQP.
- Une méthode de type points intérieurs

Quelques résultats numériques, Cas de deux avions sans retard (1)

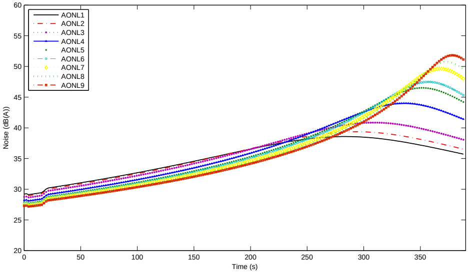

FIGURE: Aircraft optimal noise levels

Quelques résultats numériques, Premier cas (2)

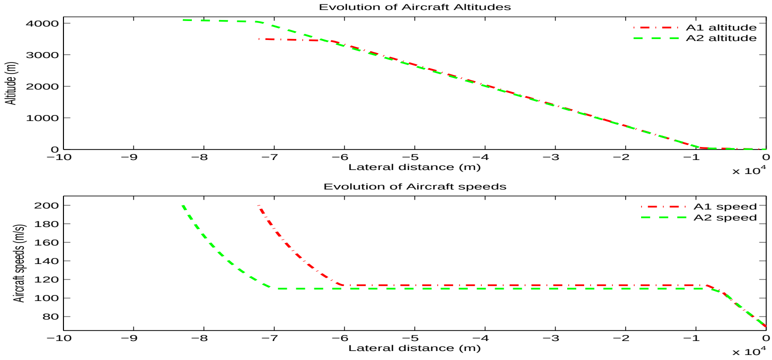

FIGURE: Evolution of the two-aircraft optimal trajectories and speeds.

Quelques résultats numériques, Premier cas (3)

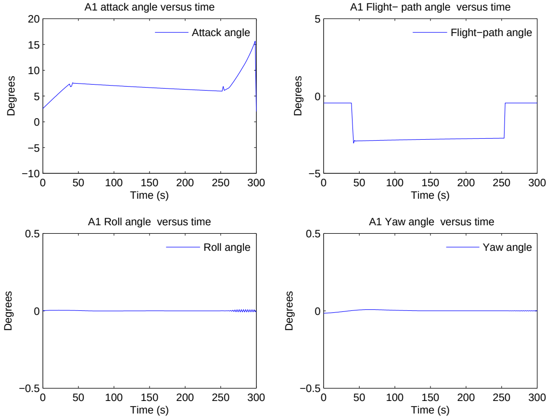

FIGURE: First aircraft flight path angles

Quelques résultats numériques, Premier cas (4)

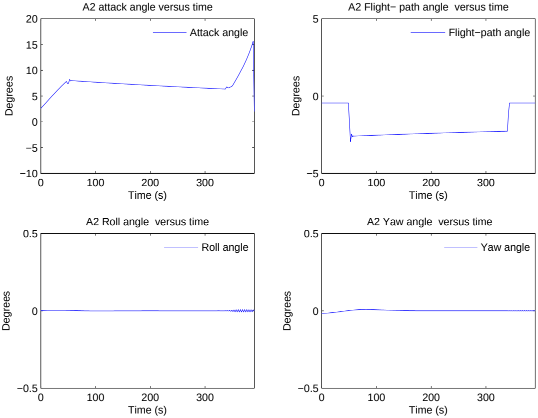

FIGURE: Second aircraft flight path angles

Quelques résultats numériques, Premier cas (5)

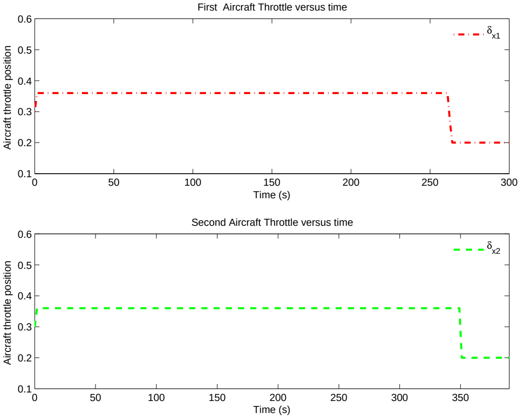

FIGURE: Aircraft throtle evolution

Quelques résultats numériques, Cas avec retard (1)

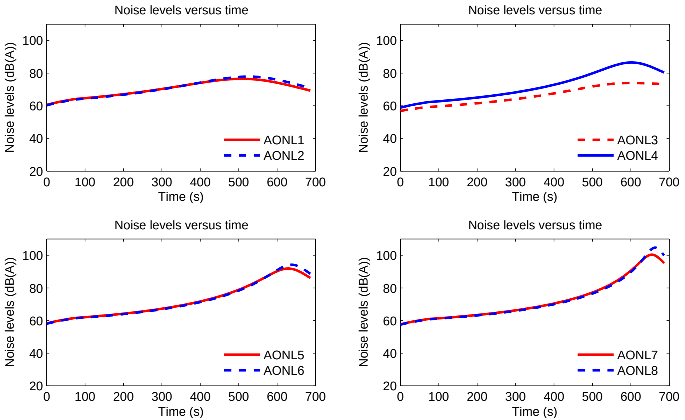

FIGURE: Optimal noise levels

Quelques résultats numériques, Deuxième cas (2)

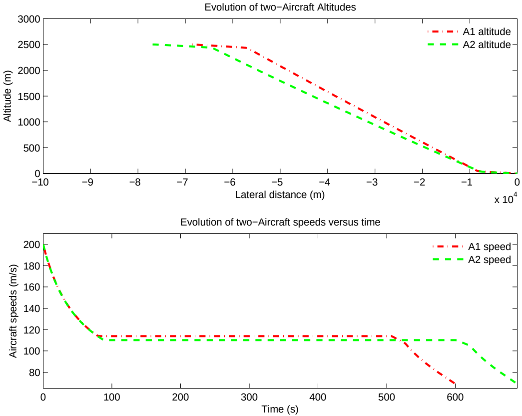

FIGURE: Aircraft optimal trajectories and speeds

Quelques résultats numériques, Deuxième cas (3)

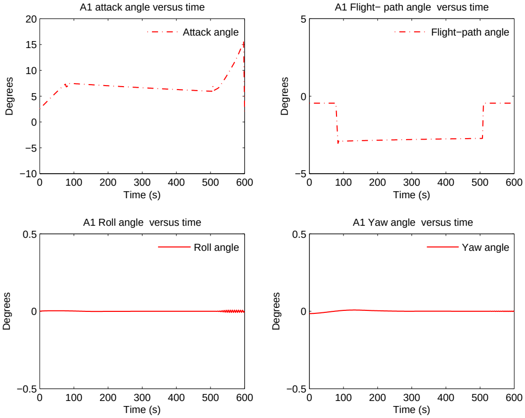

FIGURE: First aircraft flight angles

Quelques résultats numériques, Deuxième cas (4)

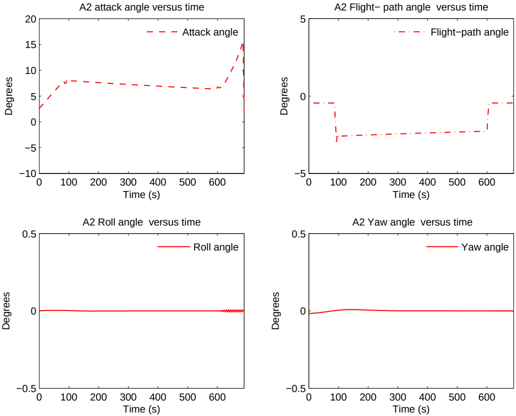

FIGURE: Second aircraft flight angles

Quelques résultats numériques, Deuxième cas (5)

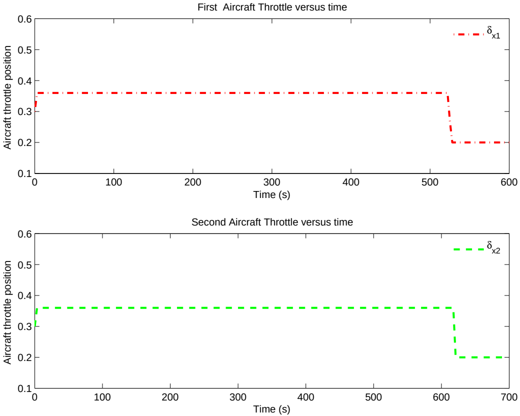

FIGURE: Aircraft throtle evolution

Interprétation des résultats

- Trajectoire optimale obtenue, Déscente continue, procédures d'approche optimales
- Les contraintes de vol sont respectées
- Cas académique non pratique en réalité.

Quelques perspectives d'avenir

- Etendre le modèle pour plus de deux avions en supposant que les avions viennent d'une même direction
- Considerer toujours un attérissage sur une même piste ou deux pistes parallèles
- Varier le type des avions
- Proposer une trajectoire optimale suivie par tout un groupe d'avions attérissant dans un aéropport.
- Comme pour le cas un seul avion, prendre en compte la consommation comme fonction objectif.
- Utiliser une méthode indirecte pour conforter les résultats

Validation et Publication des résultats

1. F.Nahayo,S.Khardi, J.Ndimubandi, M.Haddou, M.Hamadiche. *Réduction du bruit de deux avions commerciaux en approche, technique de commande optimale* , CFA, Lyon 12-16 Avril 2010
2. F.Nahayo, S.Khardi, J.Ndimubandi, M.Haddou, M.Hamadiche. *Two-Aircraft Acoustic Optimal Control Problem : SQP algorithms*, CARI'10, Yamoussoukro 18-21 Octobre 2010, accepté pour publication, ARIMA journal.
3. S.Khardi, F.Nahayo, M.Haddou. *The Trust Region Sequential Quadratic Programming Method Applied to two-Aircraft Acoustic Optimal Control Problem* , Applied Mathematical Sciences, Vol.5, 2011, no.40, 1953-1976
4. F.Nahayo, S.Khardi, M.Haddou. *Optimal control of two-Commercial Aircraft Dynamic System during Approach. The Noise Levels Minimization* , Accepté, General

Merci pour votre attention !
Vos suggestions et questions sont les bienvenues.

Annexe (1)

1. V_{ai} est la vitesse aérodynamique dont les composantes sont u_i, v_i, w_i, β_{ai} est l'angle de dérapage aérodynamique,α_{ai} est l'angle d'attaque
2. p_i, q_i, r_i sont respectivement les vitesse de roulis, de tangage et de lacet de l'avion relative à la terre.
3. X_{Gi}, Y_{Gi}, Z_{Gi} expriment la position de l'avion.
4. ϕ_i est l'angle de roulis, θ_i est l'angle de tangage et ψ_i l'angle de lacet.
5. A,B,C,E sont les moments d'inertie de l'avion.
6. (C_{li}, C_{mi}, C_{ni}) sont respectivement les coefficients de moment de roulis, de tangage et de lacet.
7. ρ, S, l sont respectivement la densité de l'air, la surface de réference de l'avion et la longueur de réference allaire
8. C_D, C_{yi}, C_{Li} sont les coefficients de force, F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} la force propulsive

Annexe (2)

- Convergence de l'algorithme moyenant les paramêtres d'optimalité suivants :
- *KNITRO output optimality conditions,*
  the local optimal solution is return with :
  - Final feasability error (abs/rel) = 1.20e-07 / 2.19e-09,
  - Final optimality error(abs/rel)=4.98e-07 / 4.98e-07,
  - Total program time (secs)=663.61902 (663.049 CPU time),