



energie atomique • énergies alternatives



Méthode des Volumes Finis pour des problèmes de thermique multi-matériaux sur grilles cartésiennes

Manuel Latige

Doctorant 1^{ère} année de l'Université Bordeaux 1

Directeur de thèse

Thierry Colin (IMB)

Encadrant

Gérard Gallice (CEA - CESTA)

INTRODUCTION

Introduction

Thermique multi-matériaux

Problème de Stefan

Conclusion

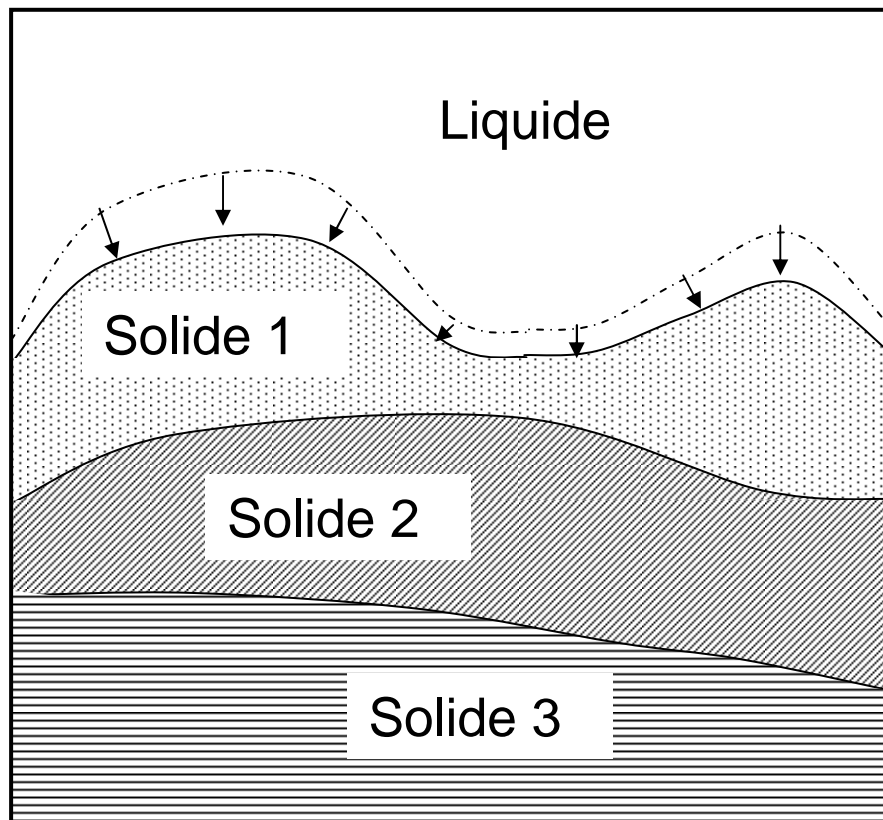
1. Contexte scientifique

2. Equation elliptique à coefficients variables

3. Changement de phase

Contexte scientifique

Problème général

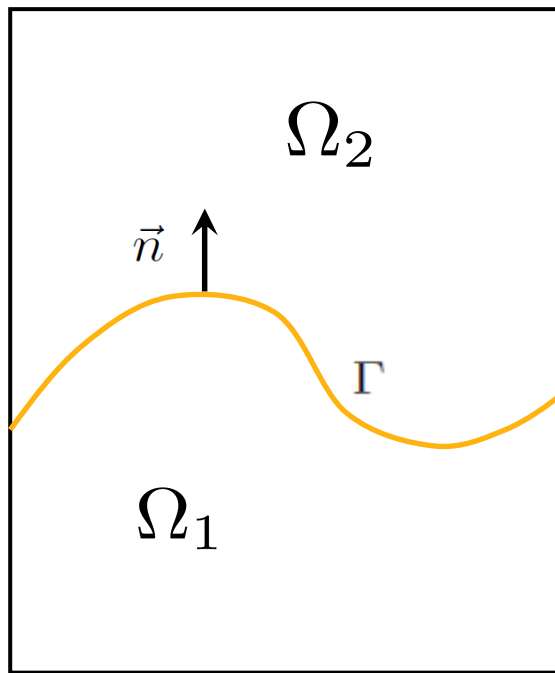


Changement de phase (fusion)

Présence de plusieurs matériaux

Problèmes de thermique multi-matériaux

Equation elliptique à coefficients variables



$$\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Discrétisation spatiale

On résout sur grilles cartésiennes :

$$-\nabla \cdot (k \nabla T) = f \quad \text{dans} \quad \Omega_1 \cup \Omega_2$$

avec les conditions de saut à l'interface Γ suivantes :

$$[T]_{\Gamma} = T_1 - T_2 = h ,$$

$$\left[k \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\Gamma} = k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = g ,$$

$$\text{où } k = k_{1/2} \text{ sur } \Omega_{1/2}$$

Changement de phase

Problème de Stefan

$$\rho_{liq} C_{liq} \partial_t T = \nabla \cdot (k_{liq} \nabla T) \text{ dans } \Omega_{liq} ,$$

$$\rho_{sol} C_{sol} \partial_t T = \nabla \cdot (k_{sol} \nabla T) \text{ dans } \Omega_{sol} ,$$

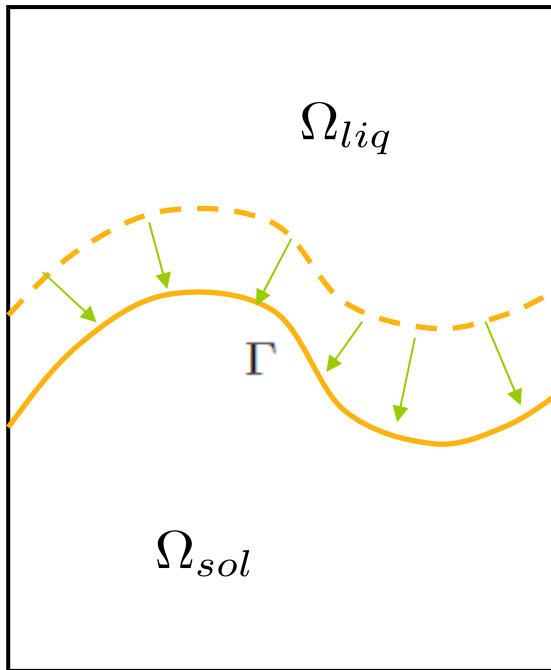
$$T = T_f \text{ sur } \Gamma ,$$

$$[k \nabla T]_{liq}^{sol} \cdot \vec{n} = \rho L \vec{V} \cdot \vec{n} \text{ sur } \Gamma ,$$

C Chaleur spécifique,

L Chaleur latente de fusion et

\vec{V} Vitesse de la paroi.



Thermique multi-matériaux

Méthode Eléments Finis – Volumes Finis

Sans interface

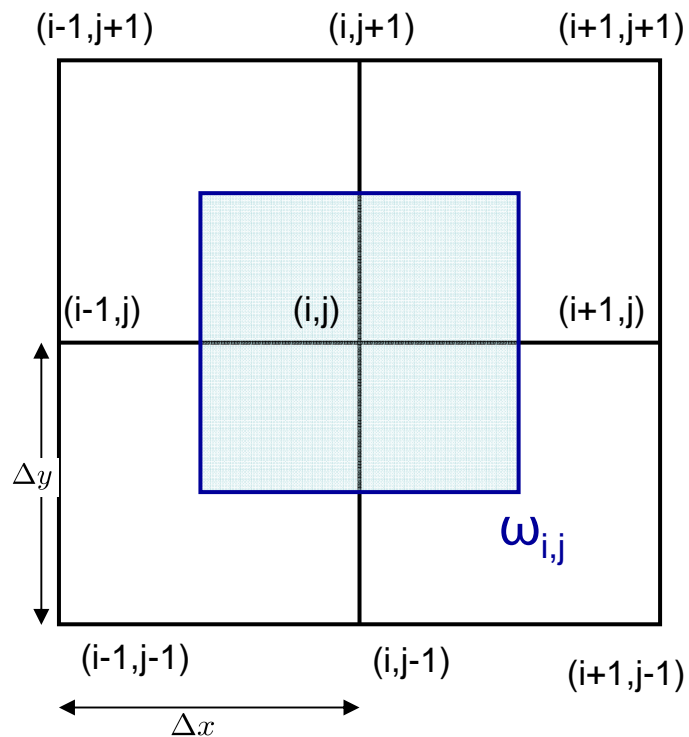


Schéma à 9 points d'ordre 2

Pour calculer :

$$-\int_{\omega_{i,j}} \nabla \cdot (k \nabla T) dS = -\int_{\partial\omega_{i,j}} k \nabla T \cdot n dl$$

on utilise dans chaque maille duale

$$T(x, y) = T_0 + \alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma (x - x_0) (y - y_0),$$

d'où le schéma (avec $\Delta x = \Delta y$)

$$\int_{\omega_{i,j}} \nabla \cdot (k \nabla T) dS = k \left[\frac{1}{4} T_{i-1,j+1} + \frac{1}{2} T_{i,j+1} + \frac{1}{4} T_{i+1,j+1} + \frac{1}{4} T_{i-1,j} - 3 T_{i,j} + \frac{1}{4} T_{i+1,j} + \frac{1}{4} T_{i-1,j-1} + \frac{1}{2} T_{i,j-1} + \frac{1}{4} T_{i+1,j-1} \right]$$

E. Süli, Convergence of finite volume schemes for poisson's equation on nonuniform meshes, SIAM Journal on Numerical Analysis 28 (5) (1991) 1419-1430

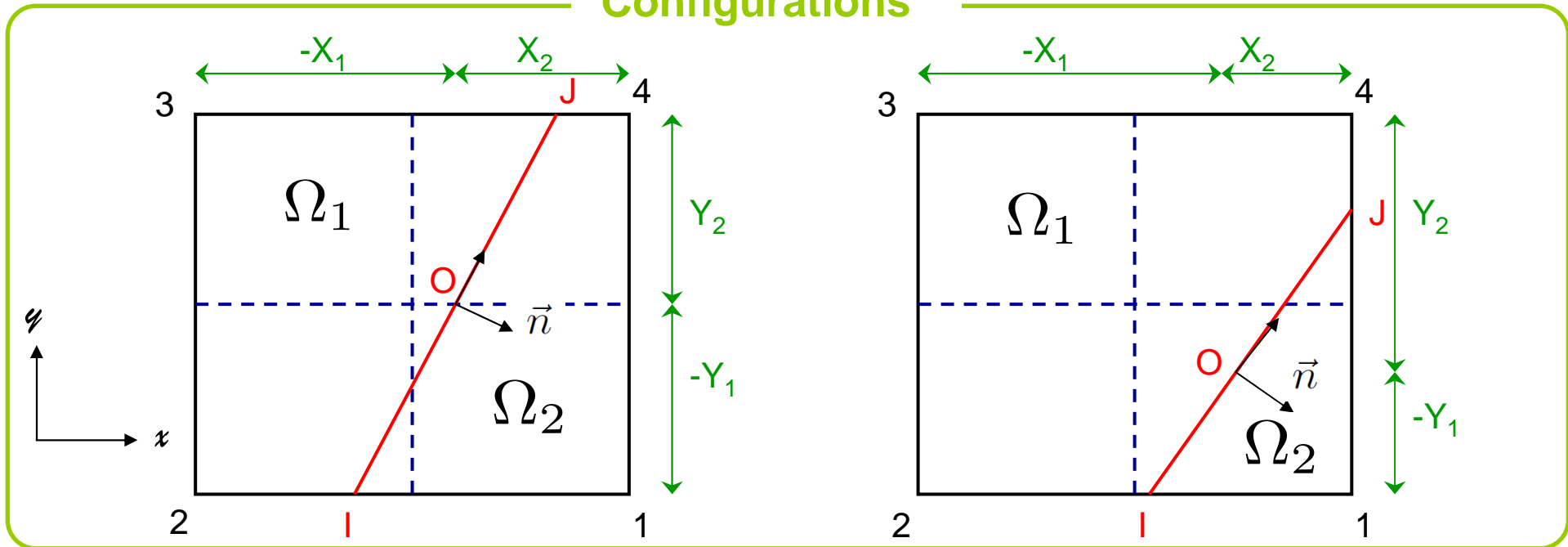
Thermique multi-matériaux

Introduction	1. Méthode EF – VF
Thermique multi-matériaux	2. Configurations géométriques
Problème de Stefan	3. Paramétrisation de l'interface
Conclusion	4. Equations du système local
	5. Résultats numériques

1. Méthode EF – VF
2. Configurations géométriques
3. Paramétrisation de l'interface
4. Equations du système local
5. Résultats numériques

Configurations géométriques

Configurations



Polynômes P_2 dans chacun des domaines

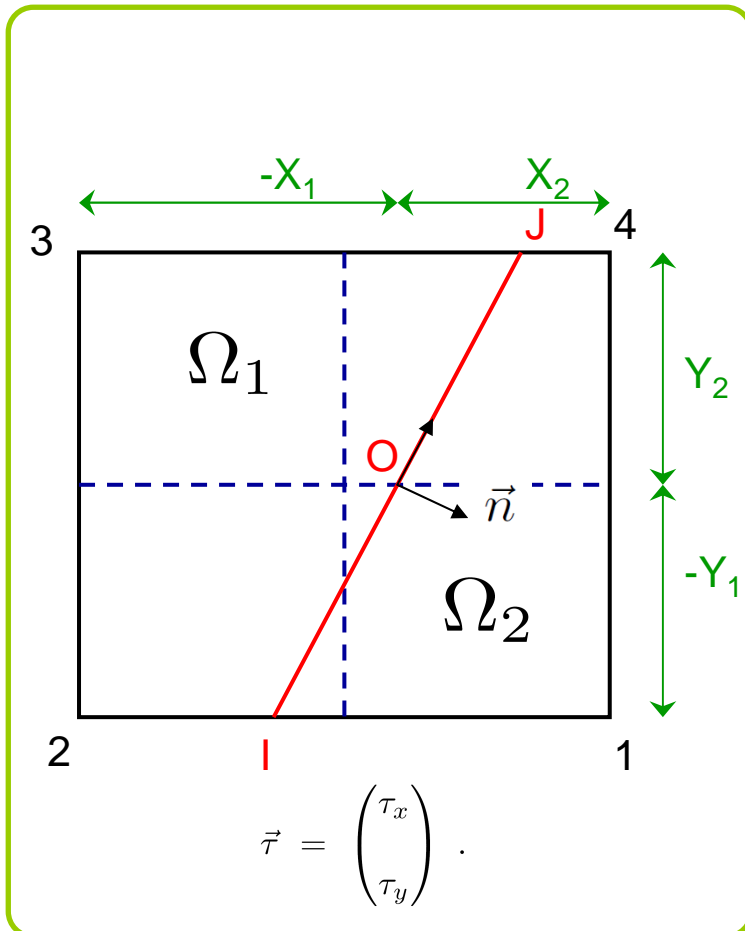
$$T(X, Y) = T_0 + \alpha X + \beta Y + \gamma XY + \lambda X^2 + \mu Y^2$$

$$X = x - x_0 \quad Y = y - y_0$$

➔ 12 inconnues

M. Oevermann, R. Klein. A cartesian grid finite volume method for elliptic equation with variable coefficients and embedded interfaces. Journal of Computational Physics, 219:749-769, 2006.

Paramétrisation de l'interface



Paramétrisation

On a $\vec{OM} = t \vec{r} \quad \forall M \in \Gamma$

d'où l'expression des polynômes P_2 sur Γ

$$T_{1,2}(t) = T_{1,2}^0 + (\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}) \cdot \vec{r} t + (\gamma_{1,2} \tau_x \tau_y + \lambda_{1,2} \tau_x^2 + \mu_{1,2} \tau_y^2) t^2.$$

$$\nabla T_{1,2}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} + (\gamma_{1,2} \tau_y + 2 \lambda_{1,2} \tau_x) t \\ \beta_{1,2} + (\gamma_{1,2} \tau_x + 2 \mu_{1,2} \tau_y) t \end{pmatrix}.$$

On fait de même pour les relations de sauts :

$$\left[k \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{\Gamma} = g \approx a t + b,$$

$$[T]_{\Gamma} = h \approx c + d t + e t^2.$$

Equations du système local (1)

Equations du système local

Relations aux quatre coins (1) (2) (3) (4)

$$\lambda = \mu \quad (5) \quad (6)$$



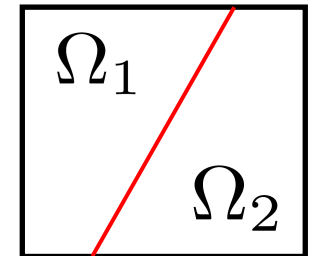
$$[T_0]_2^1 = c \quad (7)$$

$$[(\alpha, \beta) \cdot \vec{\tau}]_2^1 = d \quad (8)$$

$$[\gamma \tau_x \tau_y + \lambda]_2^1 = e \quad (9)$$

$$[k (\alpha, \beta) \cdot \vec{n}]_2^1 = \frac{1}{L_\Gamma} \int_\Gamma g \, dl \quad (10)$$

$$[k \gamma]_2^1 = 0 \quad (11)$$



$$[T]_\Gamma = h \approx c + d t + e t^2$$

~~$$[k \frac{\partial T}{\partial n}]_\Gamma = g \approx a t + b$$~~

$$[k \frac{\partial T}{\partial n}]_\Gamma = \frac{1}{L_\Gamma} \int_\Gamma g \, dl$$

Pour assurer la **continuité**

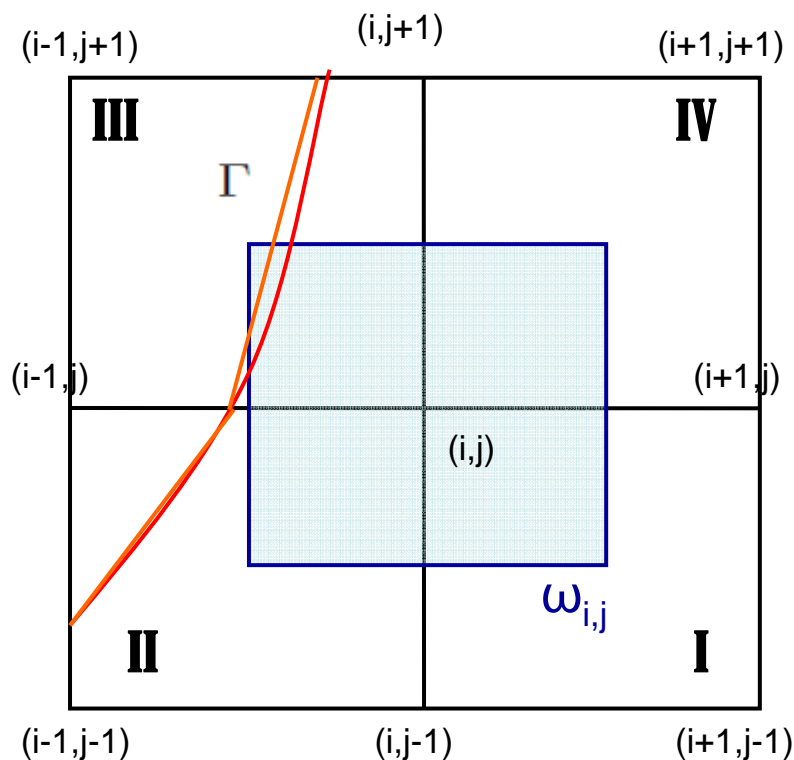


$$\min \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \quad (12)$$

Thermique multi-matériaux

Introduction	1. Méthode EF – VF
Thermique multi-matériaux	2. Configurations géométriques
Problème de Stefan	3. Paramétrisation de l'interface
Conclusion	4. Equations du système local
	5. Résultats numériques

Equations du système local (2)



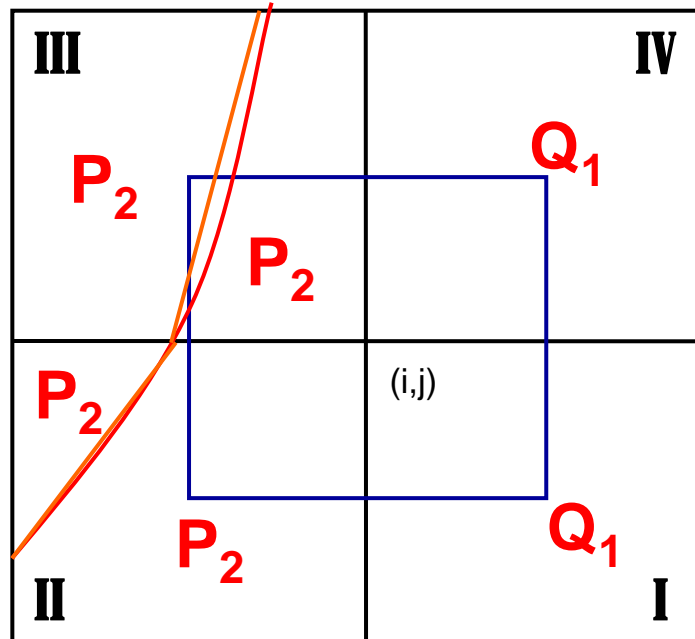
$$\begin{aligned}
 & - \int_{\omega_{i,j} \cap \Omega_1} \nabla \cdot (k_1 \nabla T) dS - \int_{\omega_{i,j} \cap \Omega_2} \nabla \cdot (k_2 \nabla T) dS \\
 & = - \int_{\partial(\omega_{i,j} \cap \Omega_1)} k_1 \nabla T \cdot n dl - \int_{\partial(\omega_{i,j} \cap \Omega_2)} k_2 \nabla T \cdot n dl
 \end{aligned}$$



$$- \sum_{m=I,IV} \sum_{s=1,2} \int_{a_s} k \nabla T \cdot n dl = \int_{\omega_{i,j}} f dS + \int_{\Gamma \cap \omega_{i,j}} h dl .$$

où $\int_{\omega_{i,j}} f dS \approx |\omega_1| f_1(x_1, y_1) + |\omega_2| f_2(x_2, y_2)$

Equations du système local (2)



$$\begin{aligned}
 & - \int_{\omega_{i,j} \cap \Omega_1} \nabla \cdot (k_1 \nabla T) dS - \int_{\omega_{i,j} \cap \Omega_2} \nabla \cdot (k_2 \nabla T) dS \\
 & = - \int_{\partial(\omega_{i,j} \cap \Omega_1)} k_1 \nabla T \cdot n dl - \int_{\partial(\omega_{i,j} \cap \Omega_2)} k_2 \nabla T \cdot n dl
 \end{aligned}$$



$$- \sum_{m=I,IV} \sum_{s=1,2} \int_{a_s} k \nabla T \cdot n dl = \int_{\omega_{i,j}} f dS + \int_{\Gamma \cap \omega_{i,j}} h dl .$$

où $\int_{\omega_{i,j}} f dS \approx |\omega_1| f_1(x_1, y_1) + |\omega_2| f_2(x_2, y_2)$

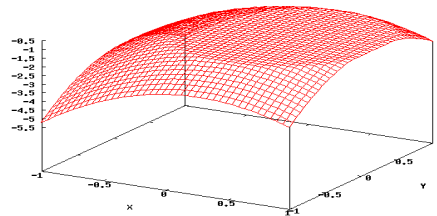
Thermique multi-matériaux

- Introduction
- Thermique multi-matériaux
- Problème de Stefan
- Conclusion

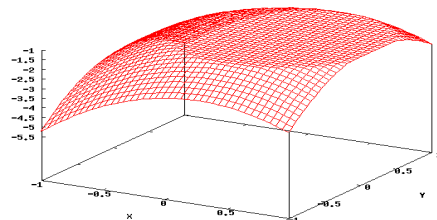
1. Méthode EF – VF
2. Configurations géométriques
3. Paramétrisation de l'interface
4. Equation du système local
5. Résultats numériques

Résultats numériques (1) : h et g nuls

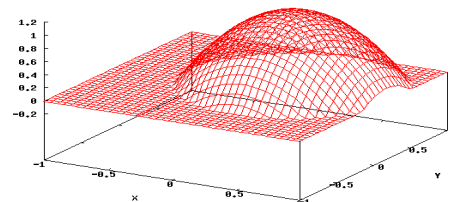
$h = 0, g = 0, f = 7$



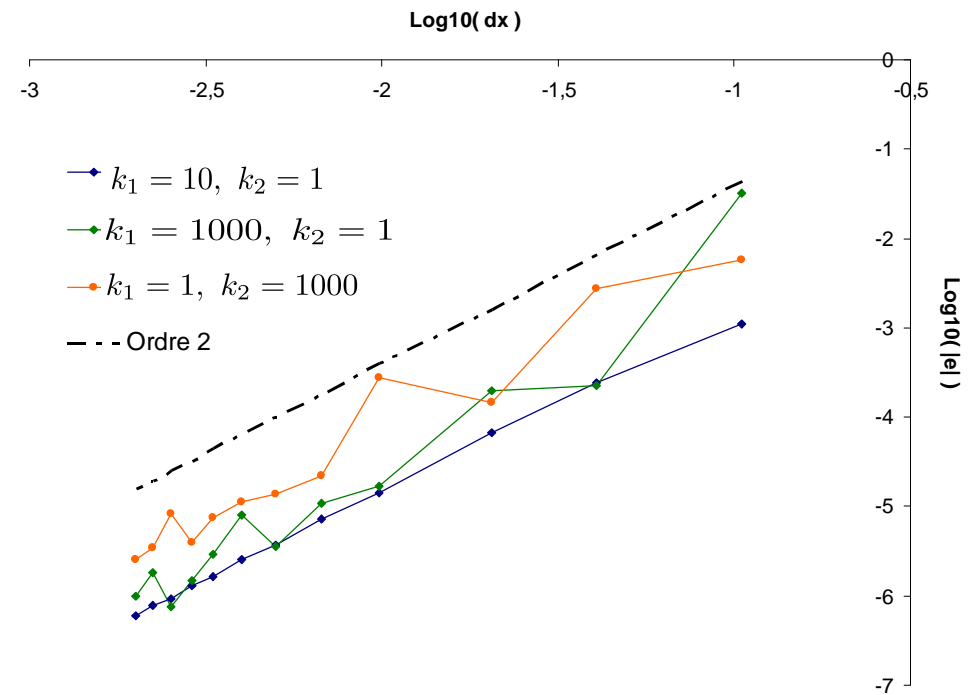
$k_1 = 10, k_2 = 1$



$k_1 = 1000, k_2 = 1$



$k_1 = 1, k_2 = 1000$



Erreur relative

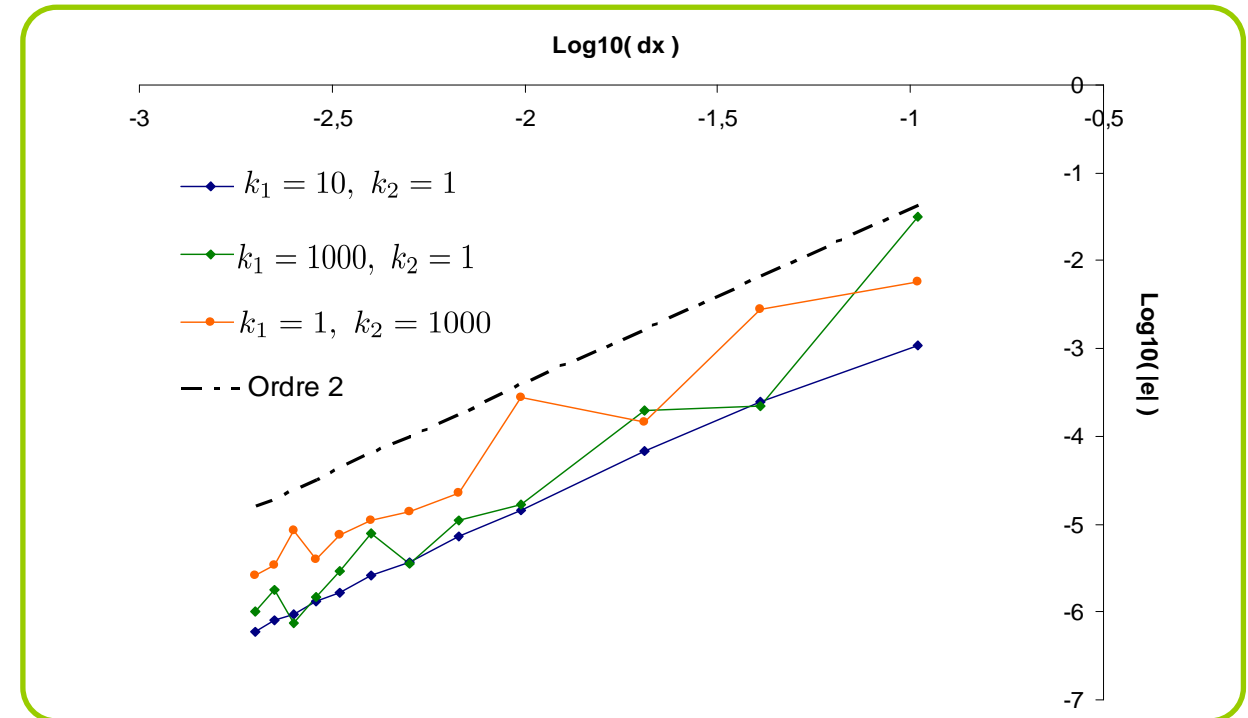
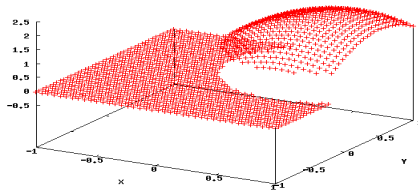
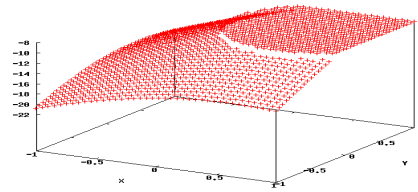
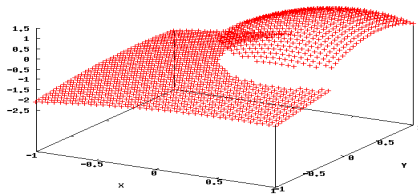
$$e = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} |T_{i,j} - T_{exacte,i,j}|^2}}{\sqrt{\sum_{i,j} |T_{exacte,i,j}|^2}}$$

Thermique multi-matériaux

Introduction	1. Méthode EF – VF
Thermique multi-matériaux	2. Configurations géométriques
Problème de Stefan	3. Paramétrisation de l'interface
Conclusion	4. Equation du système local
	5. Résultats numériques

Résultats numériques (2) : h et g non nuls

$h = 1, g = 5, f = 7$



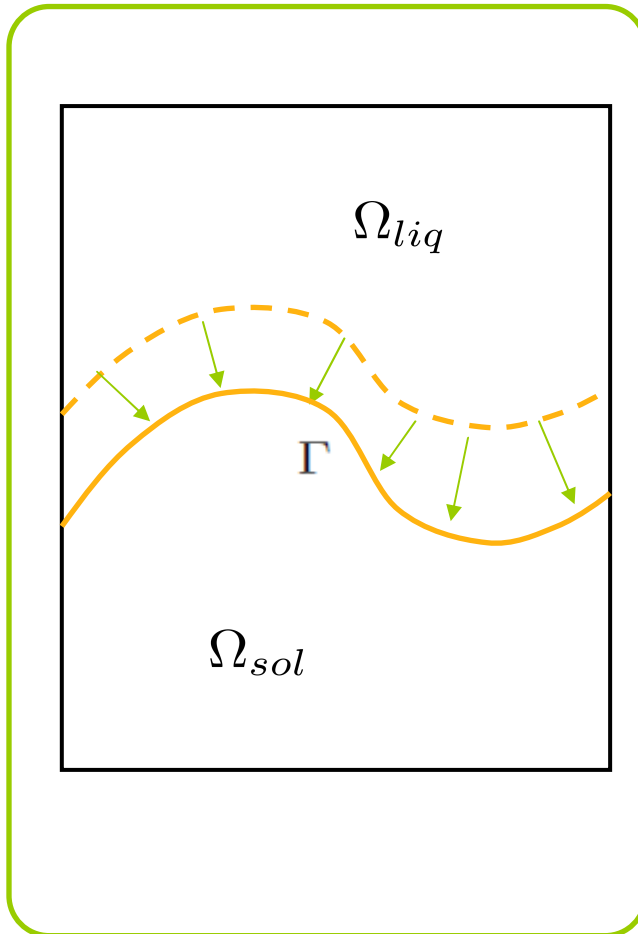
Bilan

- ✓ Traitement continu de la position de l'interface lors des déplacements
- ✓ Stencil constant de 9 points
- ✓ Robustesse
- ✓ Ordre 2

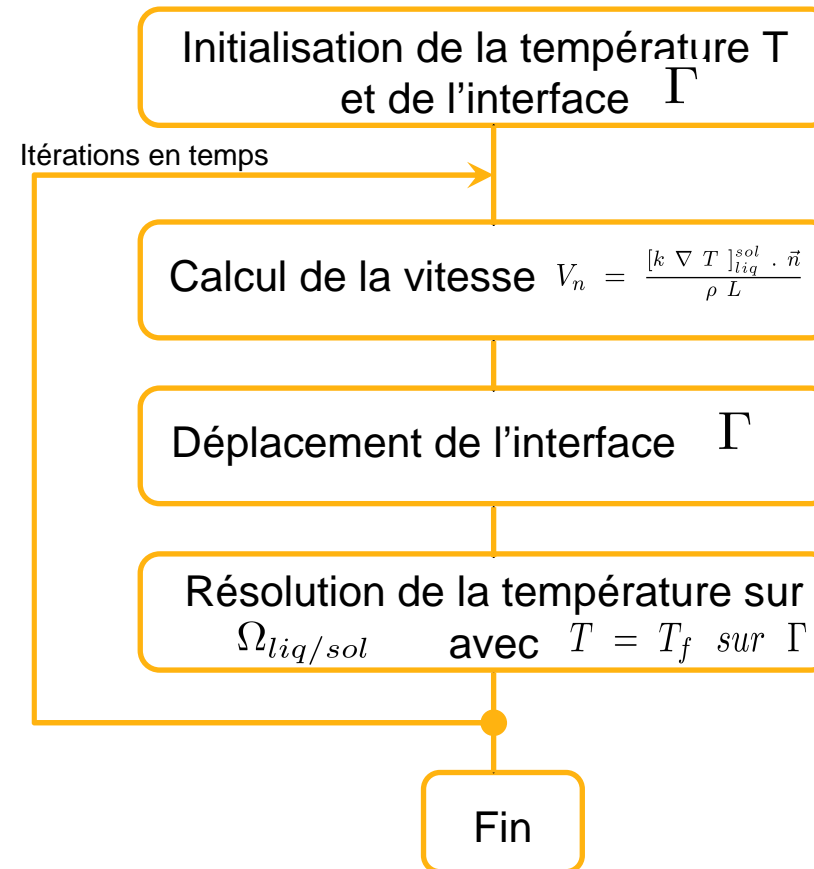
Problème de Stefan

Problème de Stefan

L'algorithme de résolution du problème de Stefan



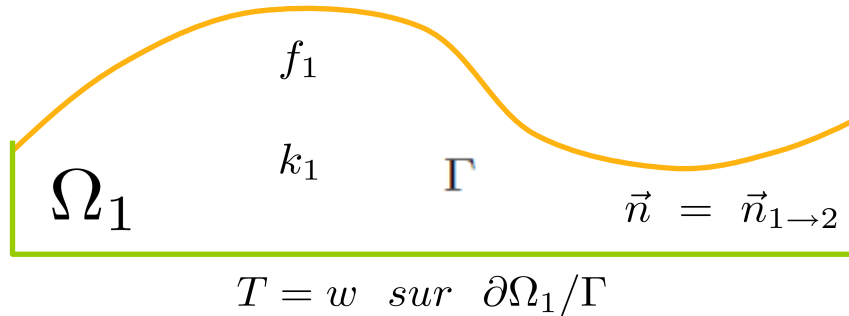
Problème de Stefan



S. Osher, E. Fedkiw, Level Set method and dynamic implicit surfaces. Number 153 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 2003.

Problème de Stefan

Méthode pour imposer une condition de Dirichlet (1)

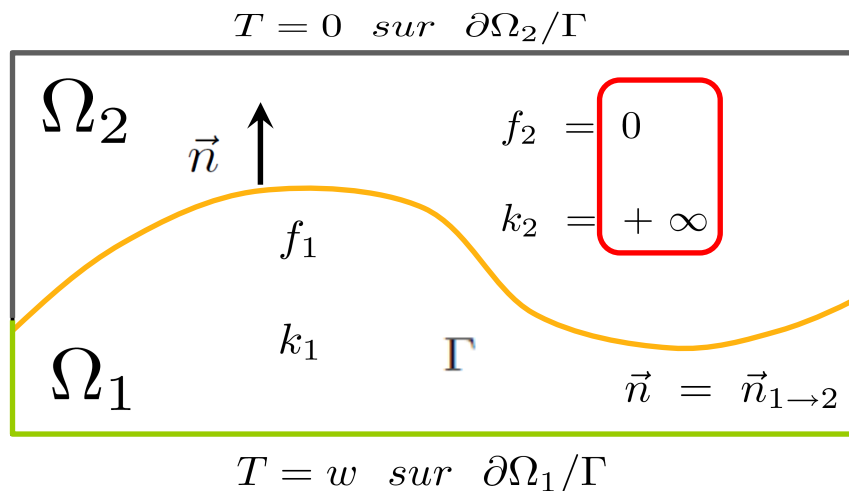


$$-\nabla \cdot (k_1 \nabla T) = f_1 \text{ sur } \Omega_1,$$

$$T = T_f \text{ sur } \Gamma.$$



Analyse asymptotique



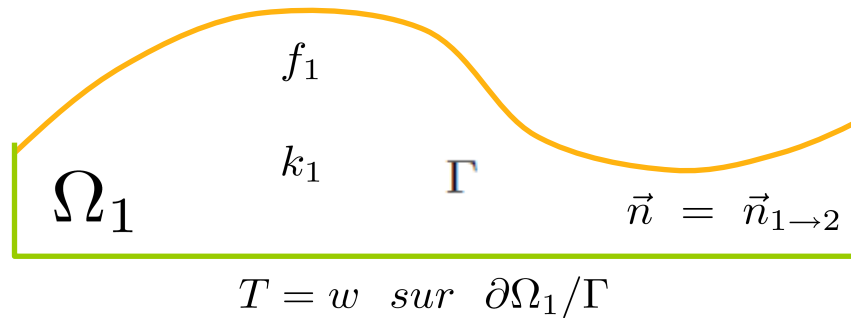
$$-\nabla \cdot (k_{1,2} \nabla T) = f_{1,2} \text{ sur } \Omega_{1,2}$$

$$[T]_{2\Gamma}^1 = T_f,$$

$$\left[k \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{2\Gamma}^1 = 0,$$

Problème de Stefan

Méthode pour imposer une condition de Dirichlet (2)

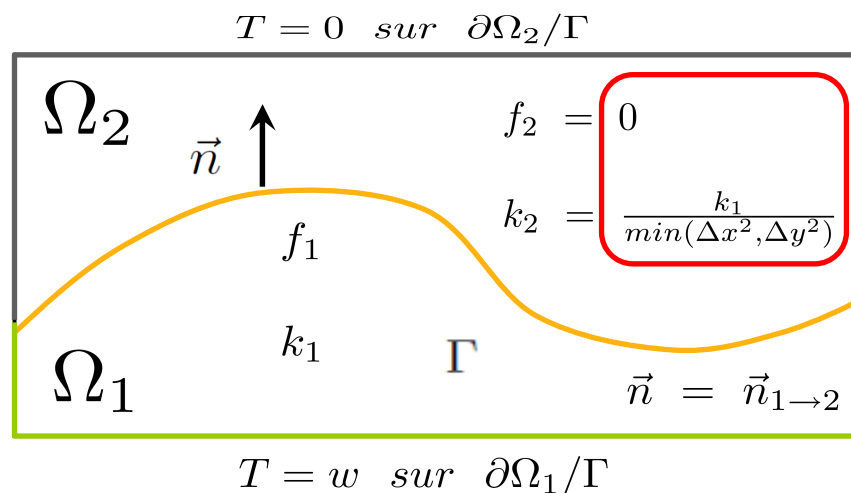


$$-\nabla \cdot (k_1 \nabla T) = f_1 \text{ sur } \Omega_1,$$

$$T = T_f \text{ sur } \Gamma.$$



Implémentation



$$-\nabla \cdot (k_{1,2} \nabla T) = f_{1,2} \text{ sur } \Omega_{1,2}$$

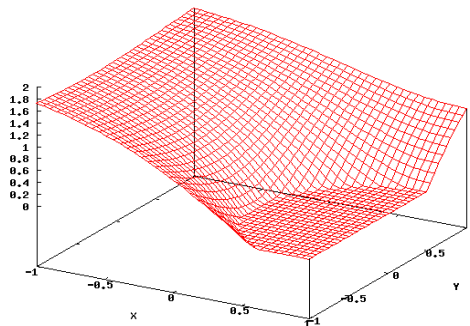
$$[T]_{2\Gamma}^1 = T_f,$$

$$\left[k \frac{\partial T}{\partial n} \right]_{2\Gamma}^1 = 0,$$

Problème de Stefan

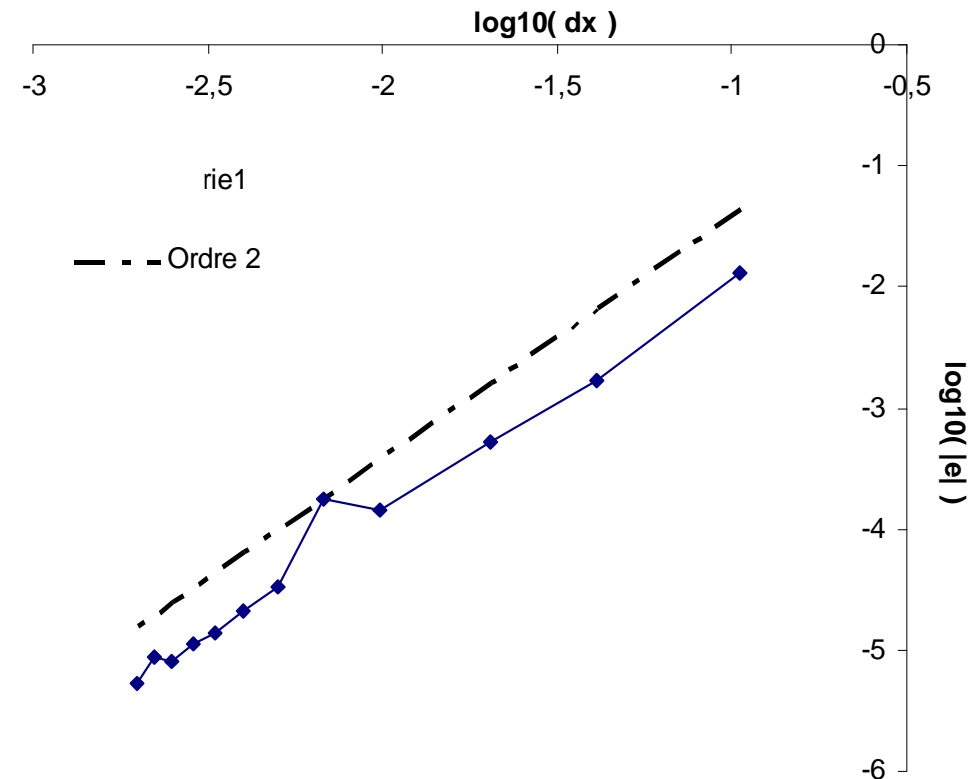
Résultats numériques (1) : Méthode pour imposer une condition Dirichlet

$T_f = 0$
 $F = 7$



Bilan

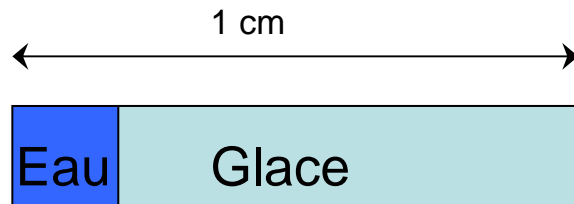
- ✓ Simplicité d'implémentation
- ✓ Stencil constant de 9 points
- ✓ Ordre 2



Problème de Stefan

Résultats numériques (2) : problème de Stefan 1D

Fonte de glace



$$T(x=0) = 7.5^{\circ}\text{C}$$

$$T_f = 0^{\circ}\text{C}$$

$$T(x=0.01) = -5^{\circ}\text{C}$$

$$K_{\text{eau}} = 0.6 \text{ W/m/K}$$

$$K_{\text{glace}} = 2.18 \text{ W/m/K}$$

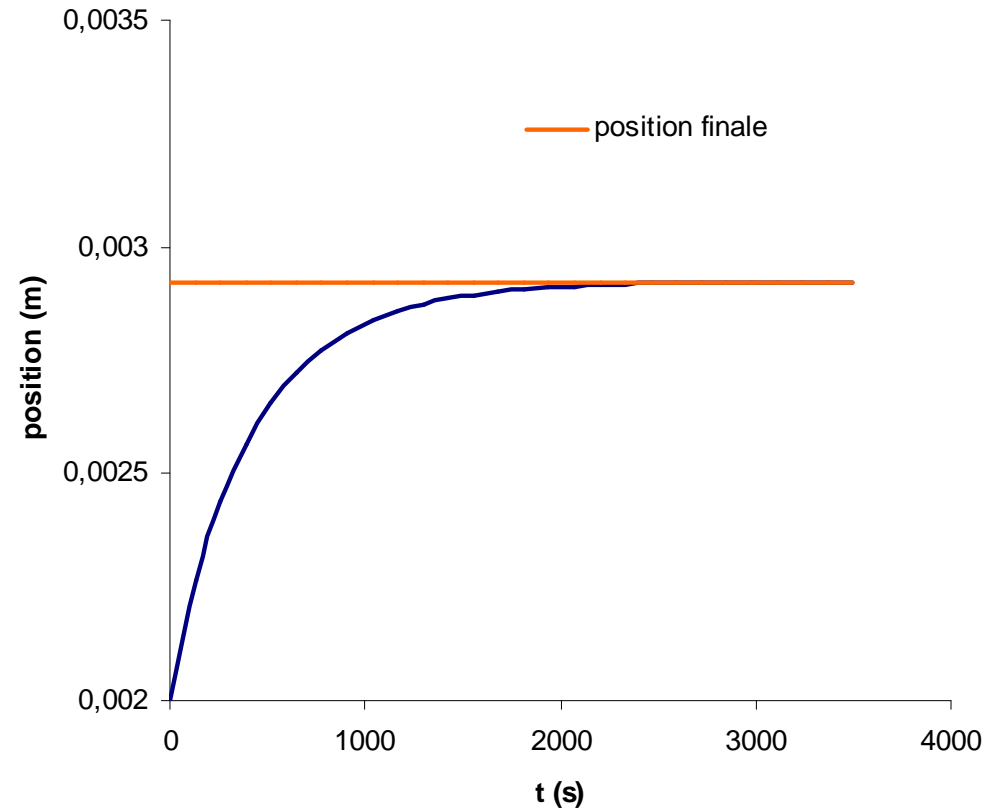
$$C_{\text{eau}} = 4186 \text{ J/kg/K}$$

$$C_{\text{glace}} = \text{J/kg/K}$$

$$L = 335000 \text{ J/kg}$$

$$\text{Rho} = 1000 \text{ Kg/m}^3$$

En cours de validation ...



Conclusion

Conclusion

Avantages de la discrétisation spatiale

- Traitement continu de l'interface lors de ses déplacements
- Stencil à 9 points constant
- Ordre 2
- Possibilité d'imposer une condition de Dirichlet

Etude à réaliser ...

- ✗ Validation du problème de Stefan en 2D
- ✗ Adaptation de la méthode sur un maillage curviligne
- ✗ Validation du problème général de thermique multi-matériaux
- ✗ Etude théorique de l'ordre de la discrétisation spatiale

Merci pour votre
attention