Lois de conservation scalaires à flux non-local
Modélisation du trafic piéton

Magali Mercier

Laboratoire MAPMO, Université d'Orléans

SMAI 2011, 23 mai 2011

Lois de conservation scalaires :

$$\partial_t u + \operatorname{div} f(t,x,u) = F(t,x,u)\,, \qquad\qquad u(0) = u_0\,,$$

f est le flux, F est la source,
equation scalaire : $u \in \mathbb{R}$,
$t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Lois de conservation scalaires :

$$\partial_t u + \mathrm{div} f(t, x, u) = F(t, x, u)\,, \qquad u(0) = u_0\,,$$

f est le flux, F est la source,
equation scalaire : $u \in \mathbb{R}$,
$t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Flux non-local

$$\partial_t u + \mathrm{div}(u\, V(x, u)) = 0\,, \qquad u(0) = u_0\,,$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $V(x) : \mathbf{L}^1 \mapsto \mathbf{W}^{2,1}$ est une fonctionnelle non-locale régularisante.

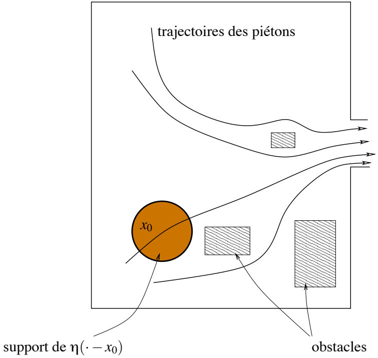
Lois de conservation scalaires à flux non-local

Trafic piéton

Soit $\rho(t,x)$ la densité de piétons au temps t au point $x \in \mathbb{R}^N$. On considère

$$\partial_t \rho + \mathrm{Div}(\rho V(x,\rho)) = 0\,; \quad \rho_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$$

avec $V(x,\rho) = v(\eta *_x \rho)\vec{\boldsymbol{w}}(x)$.



Plan

1. Lois de conservation scalaires

2. Modélisation macroscopique du trafic piéton
   - Foule paniquée
   - Foule ordonnée

I. Lois de conservation scalaires

Soit

$$\begin{aligned} \partial_t u + \mathrm{Div}\, f(t,x,u) &= F(t,x,u) \qquad (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ \partial_t v + \mathrm{Div}\, g(t,x,v) &= G(t,x,v) \end{aligned}$$

avec $u_0, v_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV}$, $f \in \mathcal{C}^2([0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$, $F \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

But : Stabilité $\mathbf{L}^1$ de la solution lorsque (f, F) varie : comment estimer $(u - v)(t)$ en fonction de $u_0 - v_0$, $f - g$, $F - G$.

Méthode : méthode de doublement des variables (Kružkov).

I. Lois de conservation scalaires

- Stabilité $\mathbf{L}^1$ de la solution lorsque (f, F) varie :

$$\begin{aligned}\left\|(u-v)(t)\right\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{\kappa t}\|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1} + t\,\mathrm{TV}(u(t))\left\|\partial_u(f-g)\right\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ + \int_0^t e^{\kappa(t-\tau)}\int_{\mathbb{R}^N}\left\|((F-G)-\mathrm{div}(f-g))(\tau,x,\cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

- Estimation de la variation totale :

$$\begin{aligned}\mathrm{TV}(u(t)) \leq \mathrm{TV}(u_0)e^{\kappa_0 t} \\ + NW_N\int_0^t e^{\kappa_0(t-\tau)}\int_{\mathbb{R}^N}\left\|\nabla_x(F-\mathrm{div}f)(\tau,x,\cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

I. Lois de conservation scalaires

- Stabilité $\mathbf{L}^1$ de la solution lorsque (f, F) varie :

$$\left\|(u-v)(t)\right\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{\kappa t}\|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1} + t\,\mathrm{TV}(u(t))\,\left\|\partial_u(f-g)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}$$
$$+ \int_0^t e^{\kappa(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^N} \left\|((F-G) - \mathrm{div}(f-g))(\tau, x, \cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\,.$$

- Estimation de la variation totale :

$$\mathrm{TV}(u(t)) \leq \mathrm{TV}(u_0)e^{\kappa_0 t}$$
$$+ NW_N \int_0^t e^{\kappa_0(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^N} \left\|\nabla_x(F - \mathrm{div} f)(\tau, x, \cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,.$$

I. Lois de conservation scalaires

- Stabilité $\mathbf{L}^1$ de la solution lorsque (f, F) varie :

$$\left\|(u-v)(t)\right\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{\kappa t}\left\|u_0 - v_0\right\|_{\mathbf{L}^1} + t\,\mathrm{TV}(u(t))\left\|\partial_u(f-g)\right\|_{\mathbf{L}^\infty}$$
$$+\int_0^t e^{\kappa(t-\tau)}\int_{\mathbb{R}^N}\left\|((F-G)-\mathrm{div}(f-g))(\tau,x,\cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)}\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\,.$$

- Estimation de la variation totale :

$$\mathrm{TV}(u(t)) \leq \mathrm{TV}(u_0)e^{\kappa_0 t}$$
$$+\,NW_N\int_0^t e^{\kappa_0(t-\tau)}\int_{\mathbb{R}^N}\left\|\nabla_x(F-\mathrm{div}f)(\tau,x,\cdot)\right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,.$$

[R. Colombo, **M. Mercier**, M. Rosini, *Stability and total variation estimates on general scalar balance laws*, Communications in Math. Sciences, 2009]

[**M. Mercier**, *Improved stability estimates on general scalar balance laws*, accepté à JHDE]

II. Modélisation macroscopique du trafic piéton

Foule paniquée

$$\partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \vec{\boldsymbol{v}}) = 0$$

Idée : $\vec{\boldsymbol{v}}$ dépend de la densité moyenne $\rho * \eta$.

Foule paniquée : $\vec{\boldsymbol{v}} = v(\rho * \eta)\, \vec{w}(x).$

Résultats : Existence and unicité de solutions faibles entropiques + derivation par rapport aux conditions initiales.

Méthode : Estimation de stabilité par rapport à (f, F) + Point fixe de Banach.

[R. Colombo, M. Herty, **M. Mercier**, *Control of the continuity equation with a non-local flow*, ESAIM-Control Optim. Calc. Var., 2010]

Idée de la preuve :

Soit $\beta > \alpha > 0$ et $T \leq T_* = \frac{\ln(\beta/\alpha)}{C(\beta)}$. On introduit l'espace

$$X_\alpha = \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; [0, \alpha])$$

et l'application $\mathcal{Q}$ qui associe à $r \in \mathcal{X}_\beta = \mathcal{C}^0([0, T[, X_\beta)$ la solution $\rho \in \mathcal{X}_\beta$ du problème

$$\partial_t \rho + \mathrm{Div}(\rho v(r * \eta)\vec{w}(x)) = 0\,, \quad \rho(0, \cdot) = \rho_0 \in X_\alpha$$

Soient r_1, r_2. Grâce à nos estimations de dépendance par rapport au flux et à la source, on obtient

$$\left\| \mathcal{Q}(r_1) - \mathcal{Q}(r_2) \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[,\mathbf{L}^1)} \leq f(T) \| r_1 - r_2 \|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[,\mathbf{L}^1)}\,,$$

où f est croissante, $f(0) = 0$ et $f \to_{T \to \infty} \infty$.
Ensuite, on applique le théorème du point fixe de Banach.

Idée de la preuve :

Soit $\beta > \alpha > 0$ et $T \leq T_* = \frac{\ln(\beta/\alpha)}{C(\beta)}$. On introduit l'espace

$$X_\alpha = \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; [0, \alpha])$$

et l'application $\mathcal{Q}$ qui associe à $r \in \mathcal{X}_\beta = \mathcal{C}^0([0, T[, X_\beta)$ la solution $\rho \in \mathcal{X}_\beta$ du problème

$$\partial_t \rho + \mathrm{Div}(\rho v(r * \eta)\vec{w}(x)) = 0\,, \quad \rho(0, \cdot) = \rho_0 \in X_\alpha$$

Soient r_1, r_2. Grâce à nos estimations de dépendance par rapport au flux et à la source, on obtient

$$\left\| \mathcal{Q}(r_1) - \mathcal{Q}(r_2) \right\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[, \mathbf{L}^1)} \leq f(T) \| r_1 - r_2 \|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[, \mathbf{L}^1)}\,,$$

où f est croissante, $f(0) = 0$ et $f \to_{T \to \infty} \infty$.
Ensuite, on applique le théorème du point fixe de Banach.

Problème : Croissance de la norme infinie de la densité au cours du temps.

But : Minimisation de la fonctionnelle de coût $J(\rho_0) = \int_\Omega f(S_t\rho_0)\mathrm{d}x$.

Définition : On dit que l'application $S : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}) \to \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ est *Gâteaux différentiable dans* $\mathbf{L}^1$*, en* $\rho_0 \in \mathbf{L}^1$*, dans la direction* $r_0 \in \mathbf{L}^1$ s'il existe une application linéaire continue $DS(\rho_0) : \mathbf{L}^1 \to \mathbf{L}^1$ telle que

$$\left\| \frac{S(\rho_0 + hr_0) - S(\rho_0)}{h} - DS(\rho_0)(r_0) \right\|_{\mathbf{L}^1} \to_{h\to 0} 0\,.$$

On s'attend à ce que la dérivée de Gâteaux soit la solution du problème linéarisé :

$$\partial_t r + \mathrm{Div}(rV(\rho) + \rho DV(\rho)(r)) = 0\,, \quad r(0,\cdot) = r_0\,.$$

Problème : Croissance de la norme infinie de la densité au cours du temps.

But : Minimisation de la fonctionnelle de coût $J(\rho_0) = \int_\Omega f(S_t\rho_0)\mathrm{d}x$.

Définition : On dit que l'application $S : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}) \to \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ est *Gâteaux différentiable dans* $\mathbf{L}^1$*, en* $\rho_0 \in \mathbf{L}^1$*, dans la direction* $r_0 \in \mathbf{L}^1$ s'il existe une application linéaire continue $DS(\rho_0) : \mathbf{L}^1 \to \mathbf{L}^1$ telle que

$$\left\| \frac{S(\rho_0 + hr_0) - S(\rho_0)}{h} - DS(\rho_0)(r_0) \right\|_{\mathbf{L}^1} \to_{h\to 0} 0\,.$$

On s'attend à ce que la dérivée de Gâteaux soit la solution du problème linéarisé :

$$\partial_t r + \mathrm{Div}(rV(\rho) + \rho DV(\rho)(r)) = 0\,, \quad r(0,\cdot) = r_0\,.$$

Résultats :

- Existence de solutions faibles entropiques pour le problème linéarisé.
- Dérivation au sens de Gâteaux du semi-groupe.

Théorème (Gâteaux Dérivée — Colombo, Herty, Mercier, 2010)

Soit $\rho_0 \in \mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1}$, $r_0 \in \mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{L}^\infty$ et soit T_{ex} le temps d'existence pour le problème initial.
Alors, pour tout $t \in [0, T_{ex}[$ le semi-groupe local du problème de trafic piéton est $\mathbf{L}^1$ Gâteaux différentiable dans la direction r_0 et

$$DS_t(\rho_0)(r_0) = \Sigma_t^{S_t \rho_0} r_0 \, .$$

Idée de preuve

Soient ρ, ρ_h les solutions du problème $\partial_t \rho + \mathrm{Div}(\rho V(\rho)) = 0$ avec conditions initiales $\rho_0, \rho_0 + h r_0$.
Soit r la solution du problème linéarisé $\partial_t r + \mathrm{Div}(rV(\rho) + \rho DV(\rho)(r)) = 0$, $r(0) = r_0$ et soit $z_h = \rho + hr$ qui vérifie alors

$$\partial_t z_h + \mathrm{Div}\left(z_h(V(\rho) + hDV(\rho)(r))\right) = h^2 \mathrm{Div}(rDV(\rho)(r)), \quad z_h(0) = \rho_0 + hr_0 .$$

On utilise ensuite le Thm (Flux/Source) pour comparer ρ_h et z_h. On obtient

$$\frac{1}{h}\|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[,\mathbf{L}^1)} \leq F(T)\left(\frac{1}{h}\|\rho_h - \rho\|^2_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)} + \frac{1}{h}\|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)}\right) + hC(\beta)Te^{C(\beta)T}\|r\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{W}^{1,1})}\|r\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)},$$

avec F croissante et $F(0) = 0$.

Idée de preuve

Soient ρ, ρ_h les solutions du problème $\partial_t \rho + \mathrm{Div}(\rho V(\rho)) = 0$ avec conditions initiales $\rho_0, \rho_0 + hr_0$.
Soit r la solution du problème linéarisé $\partial_t r + \mathrm{Div}(rV(\rho) + \rho DV(\rho)(r)) = 0$, $r(0) = r_0$ et soit $z_h = \rho + hr$ qui vérifie alors

$$\partial_t z_h + \mathrm{Div}\left(z_h(V(\rho) + hDV(\rho)(r))\right) = h^2 \mathrm{Div}(rDV(\rho)(r)), \quad z_h(0) = \rho_0 + hr_0 .$$

On utilise ensuite le Thm (Flux/Source) pour comparer ρ_h et z_h. On obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T[,\mathbf{L}^1)} \leq & F(T)\left(\frac{1}{h}\|\rho_h - \rho\|^2_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)} + \frac{1}{h}\|\rho_h - z_h\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)}\right) \\ & + hC(\beta)Te^{C(\beta)T}\|r\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{W}^{1,1})}\|r\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^1)},\end{aligned}$$

avec F croissante et $F(0) = 0$.

II. Modélisation macroscopique du trafic piéton

Foule ordonnée

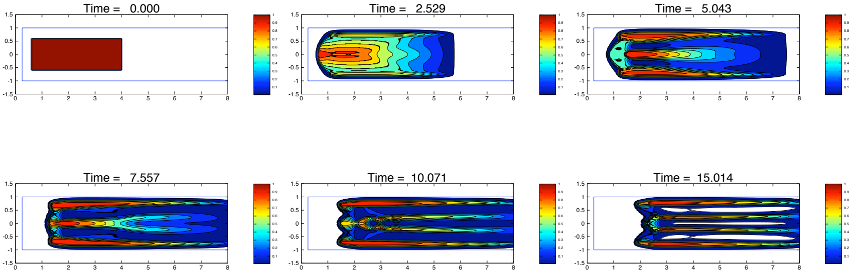
$$\vec{\boldsymbol{v}} = v(\rho) \left(\vec{w}(x) - \varepsilon \frac{\nabla \rho * \eta}{\sqrt{1 + \left\| \nabla \rho * \eta \right\|^2}} \right)$$

Résultats : Existence et unicité de solutions faibles entropiques, $\rho_0 \in [0,1] \Rightarrow \rho(t) \in [0,1]$, Stabilité par rapport aux paramètres.

[R. Colombo, M. Garavello et **M. Mercier**, *A class of non-local models for pedestrian traffic*, soumis]

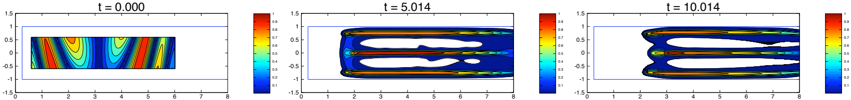
II. Modélisation macroscopique du trafic piéton

Foule ordonnée



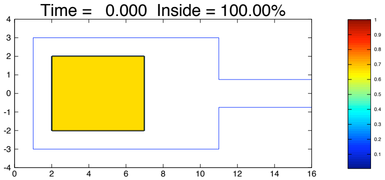
II. Modélisation macroscopique du trafic piéton

Foule ordonnée



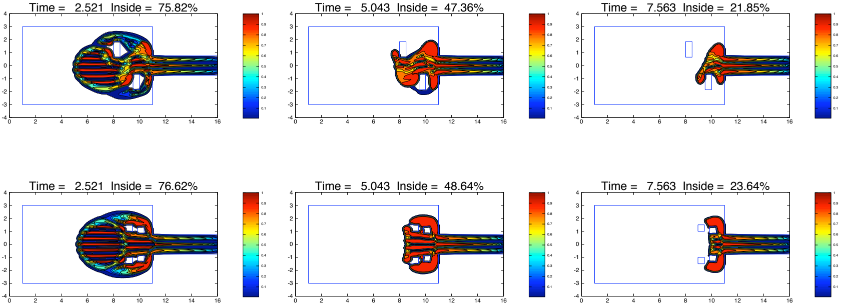
II. Modélisation macroscopique du trafic piéton

Foule ordonnée



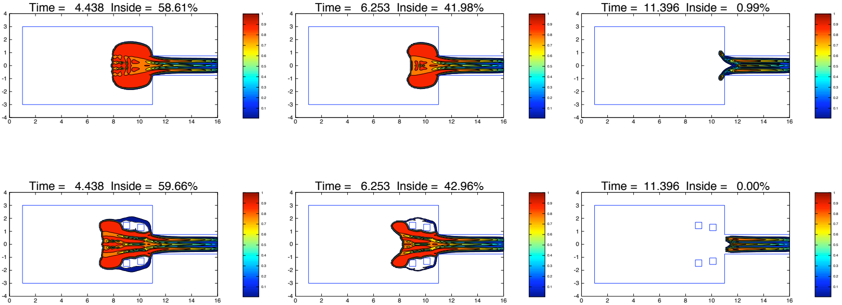
II. Modélisation macroscopique du trafic piéton

Foule ordonnée



II. Modélisation macroscopique du trafic piéton

Foule ordonnée



Perspectives

- Affaiblissement des hypothèses + généralisation aux systèmes

$$\partial_t \rho_i + \mathrm{div}(\rho_i V_i(x, \rho_1 * \eta_1, \ldots, \rho_k * \eta_k)) = 0\,, \qquad i \in \{1, \ldots, k\}\,.$$

[G. Crippa et **M. Mercier**, *Existence and uniqueness of measure solutions for a system of continuity equations with non-local flow*, in preparation]

- Introduction de fonctionnelles de coût et minimisation.