Splitting d'ordre 4 pour Vlasov Poisson

M. Mehrenberger

Université de Strasbourg, INRIA Grand Est, Projet CALVI, ANR GYPSI

Guidel, Congrès SMAI
le 26 mai 2011

Collaboration avec Nicolas Crouseilles et Erwan Faou (Rennes)

Equation de Vlasov

Fonction de distribution $f(t,x,v)$ solution de l'équation de Vlasov
$f(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ représente la probabilité de trouver des particules dans un élément de volume $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ au temps t au point (x,v) (position, vitesse)

$$\partial_t f + v\cdot\nabla_x f + F(t,x)\cdot\nabla_v f = 0$$

- Equation de transport
- Non linéarité par le champ F qui dépend de f (Poisson, Maxwell)
- Description de la dynamique de particules chargées dans un plasma

Vlasov-Poisson (1D $\times$ 1D)

$$\partial_t f(t,x,v) + v\partial_x f(t,x,v) + E(t,x)\partial_v f(t,x,v) = 0,$$

où le champ E est solution de l'équation de Poisson

$$\partial_x E(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(t,x,v)dv - 1$$

et à moyenne nulle ($\int_0^L E(t,x)dx = 0$)

Formulation caractéristique

$$f(t,z) = f_0(Z(0;t,z)),\ z = (x,v),$$

avec $Z(t;s,x,v) = (X(t),V(t))$ où

$$X'(t) = V(t),\ V'(t) = E(t,X(t)),\ X(s) = x,\ V(s) = v$$

- Choix d'une discrétisation en **espace** :

  interpolation de Lagrange de degré $2d+1$, splines cubiques

- Choix d'une discrétisation en **temps** :

  généralement, splitting de Strang d'ordre 2

  $\Rightarrow$ on cherche ici à améliorer l'ordre en temps

Le splitting de Strang d'ordre 2

Transport en x sur $\Delta t/2$

$$\partial_t f(t,x,v) + v\partial_x f(t,x,v) = 0$$

Mise à jour du champ E
Transport en v sur Δt

$$\partial_t f(t,x,v) + E(t,x)\partial_v f(t,x,v) = 0$$

Transport en x sur $\Delta t/2$

$$\partial_t f(t,x,v) + v\partial_x f(t,x,v) = 0$$

Le splitting de Strang d'ordre 2

Transport en x sur $\Delta t/2$

$$\mathcal{T}_x : f \to f(x - v\Delta t/2, v)$$

Mise à jour du champ E
Transport en v sur Δt

$$\mathcal{T}_v : f \to f(x, v - E(x)\Delta t)$$

Transport en x sur $\Delta t/2$

$$\mathcal{T}_x : f \to f(x - v\Delta t/2, v)$$

Les caractéristiques des parties splittées s'intègrent **exactement**

Un résultat de convergence

Lemme (M. Campos Pinto, M.M.)

Soit $f_0 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et $f(t_n)$ la solution de l'équation de Vlasov-Poisson. On a alors

$$\|f(t_{n+1}) - \mathcal{T}_x \mathcal{T}_v \mathcal{T}_x f(t_n)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_T \Delta t^3.$$

Si $f_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$, résultat de N. Besse

Le schéma général de splitting

Transport en x sur $a_k\Delta t$

$$\mathcal{T}_x(a_k) : f \to f(x - va_k\Delta t, v)$$

Transport en v sur $b_k\Delta t$

$$\mathcal{T}_{v,E}(b_k) : f \to f(x, v - E(x)b_k\Delta t)$$

Schéma

$$f \to f_1 = \mathcal{T}_x(a_1)f \to f_2 = \mathcal{T}_{v,E[f_1]}(b_1)f_1 \to \dots$$

Strang

$$a_1 = 1/2 = a_2,\ b_1 = 1.$$

Questions et références

Quelques questions

- Quel(s) intérêt(s) des méthodes de splitting ?
- Y a-t-il un intérêt de choisir d'autres coefficients que ceux de Strang ?
- Comment choisir les coefficients ?

Littérature

- Watanabe-Sugama (2004) : énergie conservée en Δt^d pour VP
- Yoshida (1991) : Méthodes d'ordre pair par composition
- Blanes-Moan (2000) : choix pratique de coefficients (ordre 4, 6)
- Blanes-Casas-Murea (2008) : théorie générale sur les coefficients
- Schaeffer (2009) : schéma d'ordre 4 théorique pour VP linéarisé

Avantages/inconvénients du splitting

- bien adapté pour Vlasov-Poisson (cadre advection constante)
- simplicité $1D$ (implémentation, coût de calcul)
- cas de l'advection constante :

  gain en coût de calcul, résultats de convergence
- Nombre d'étapes peut être important ; perte de localité
- cas de l'advection non constante :

  forme conservative préférable à la forme advective
- ...mais perte du principe du maximum sur chaque étape

Plan

I. Résultats numériques
II. Stratégie de calcul pour trouver les équations de l'ordre 4
III. Lien avec la théorie générale

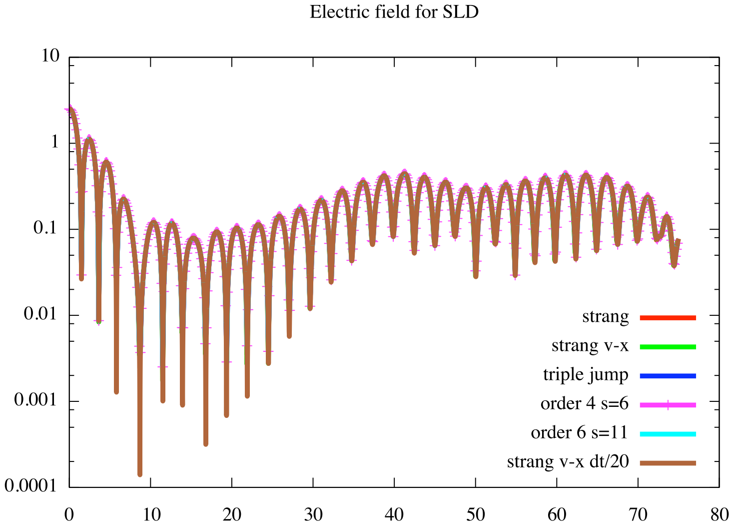
Landau non linéaire (SLD)

$$N_x = N_v = 1024,\ \Delta t = 0.125,\ v_{\max} = 6,\ k = 0.5,\ \alpha = 0.5.$$

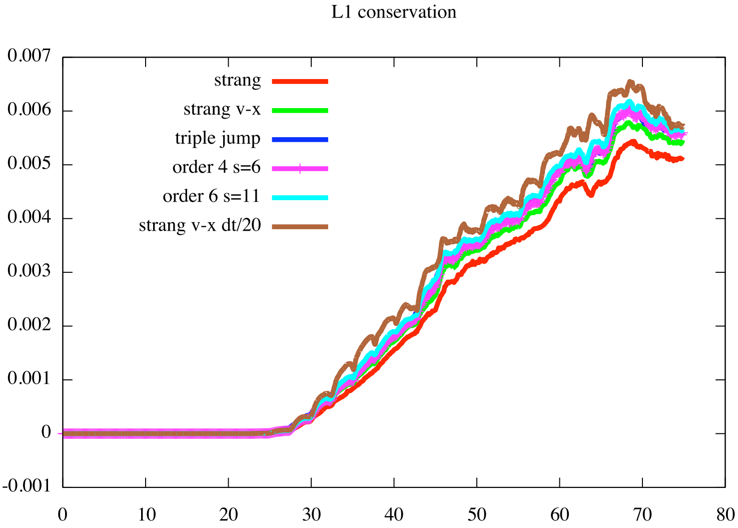
Interpolation de Lagrange d'ordre 17 en x et en v.

- **Strang** : $a = [0.5, 0.5],\ b = [1]$
- **Strang v-x** : $a = [1],\ b = [0.5, 0.5]$
- **Triple jump** : $a = [0.676, -0.176, -0.176, 0.676]$
$b = [1.351, -1.70, 1.35]$
- **Ordre 4 (s=6)** : $a = [0.245, 0.605, -0.350, -0.350, 0.605, 0.245]$
$b = [0.0830, 0.396, -0.0391, 0.120, -0.0391, 0.396, 0.0830]$
- **Ordre 6 (s=11)** :
$a = [0.123, 0.291, -0.127, -0.246, 0.357, 0.205, 0.357, \ldots]$
$b = [0.0415, 0.198, -0.04, 0.0753, -0.0115, 0.237, 0.237, -0.0115, \ldots]$

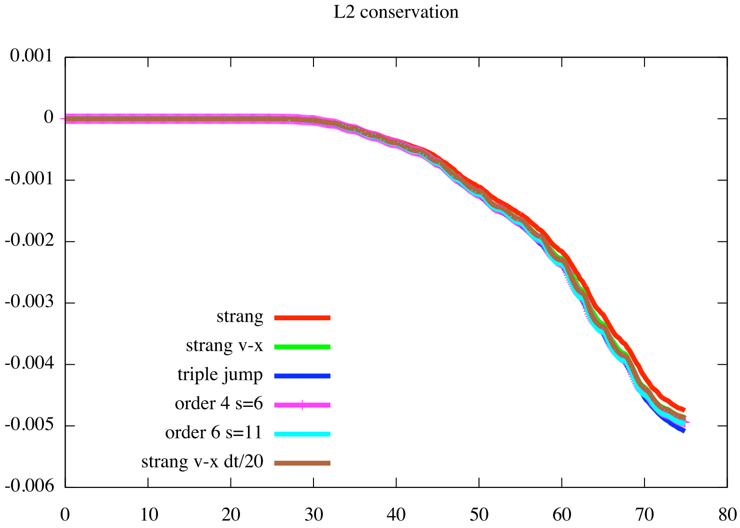
Landau non linéaire (SLD)



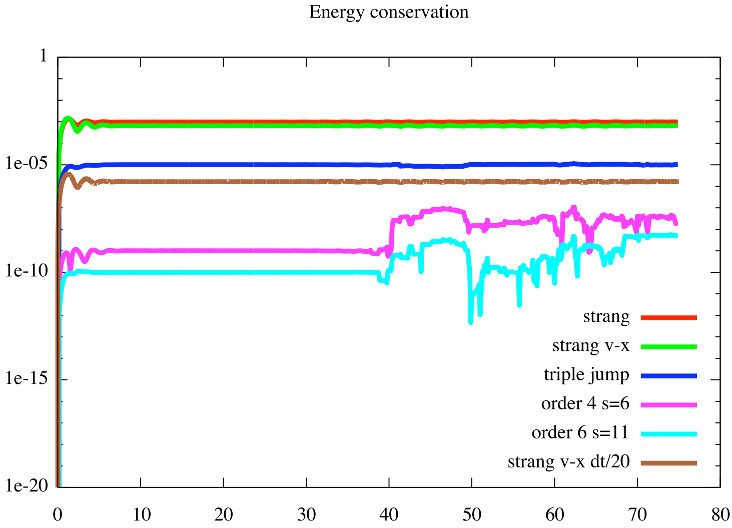
Landau non linéaire (SLD)



Landau non linéaire (SLD)



Landau non linéaire (SLD)



Identités des caractéristiques

$$X(t; s, x, v) = x + \int_s^t V(\sigma; s, x, v)d\sigma,$$

$$V(t; s, x, v) = v + \int_h^t E(\sigma, X(\sigma; s, x, v))d\sigma$$

Formule de Green pour E

$$E(t, x) = \int_0^L K(x, y)\left(\int_{\mathbb{R}} f_0(X(0; t, y, w), V(0; t, y, w))dw - 1\right)dy.$$

Forme des caractéristiques numériques

$$X_0 = x,\, V_0 = v,$$
$$X_{j+1} = X_j + c_{2j} V_j t$$
$$V_{j+1} = V_j + c_{2j+1} t G_{2j+1}(t, X_{j+1}),\ j = 0, \ldots$$

Méthodologie

Méthode en arrière

$$Z(0;\Delta t,z),\ Z_{\mathrm{num}}(0;\Delta t,z)$$

$\Rightarrow$ **Champ électrique**

$$E_{\mathrm{num}}(\Delta t,x)=\int_0^L K(x,y)\left(\int_{\mathbb{R}} f(0,Z_{\mathrm{num}}(0;\Delta t,(y,v)))dv-1\right)dy$$

Méthode en avant

$$Z(\Delta t;0,z),\ Z_{\mathrm{num}}(\Delta t;0,z)$$

Méthodologie

$$X(0;\Delta t,x,v)=\sum_{j=0}^{d} X_b^{[j]}\frac{\Delta t^j}{j!}+O(\Delta t^{d+1})$$

$$X(\Delta t;0,x,v)=\sum_{j=0}^{d} X_f^{[j]}\frac{\Delta t^j}{j!}+O(\Delta t^{d+1})$$

Quelques exemples

Moments

$$I_k(x) = \int_{\mathbb{R}} v^k f(0,x,v)dv.$$

Champ numérique à l'étape $p+1$ en v

$$\partial_t^2 E_{p+1}(0,x) = \left(\sum_{k=0}^{p} a_{k+1}\right)^2 \partial_x I_2(x) - 2\sum_{k=0}^{p} a_{k+1} \sum_{\ell=0}^{k-1} b_{\ell+1} E(0,x) I_0(x)$$

Champ continu

$$\partial_t^2 E(0,x) = \partial_x I_2(x) - E(0,x) I_0(x).$$

Quelques exemples

Caractéristiques numériques

$$V_{f,s}^{[3]} = 3\sum_{\ell=1}^{s} b_\ell \Big(\left(\sum_{k=0}^{\ell-1} a_{k+1} \right)^2 (\partial_x I_2(x) + v^2 \partial_x I_0(x) - 2v\partial_x I_1(x)) - 2\sum_{p=0}^{\ell-1} a_{p+1} \sum_{r=1}^{p} b_r E(0,x) \Big)$$

Caractéristiques continues

$$V_b^{[3]} = -v^2 \partial_x I_0(x) + E(0,x) - \partial_x I_2(x) - v\partial_x I_1(x)$$

$$V_f^{[3]} = v^2 \partial_x I_0(x) - E(0,x) + \partial_x I_2(x) - 2v\partial_x I_1(x)$$

Les équations (ordre 1 et 2)

$$[X_1] \ \sum_{j=0}^{s} a_{j+1} = 1$$

$$[V_1] \ \sum_{j=1}^{s} b_j = 1$$

$$[X_2] \ 2\sum_{j=0}^{s} a_{j+1} \sum_{k=1}^{j} b_k = 1$$

$$[V_2] \ 2\sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{k=0}^{j-1} a_{k+1} = 1$$

Les équations (ordre 3)

$$[X_3]\ 6\sum_{j=0}^{s} a_{j+1}\sum_{k=1}^{j} b_k \sum_{\ell=0}^{k-1} a_{\ell+1} = 1$$

$$[V_{3a}]\ 3\sum_{j=1}^{s} b_j \left(\sum_{k=0}^{j-1} a_{k+1}\right)^2 = 1$$

$$[V_{3b}]\ 6\sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{k=0}^{j-1} a_{k+1}\sum_{\ell=1}^{k} b_\ell = 1$$

Manipulations algébriques

Notation de Blanes

$$p_0 = 0,\ p_{2j+1} = a_j - p_j,\ p_{2j+2} = b_{j+1} - p_{2j+1},$$

$$B_1 = \sum_{j=1}^{2s} p_j, \qquad B_2 = \sum_{j=1}^{2s} (-1)^j p_j^2,$$

$$B_{3a} = \sum_{j=0}^{2s} p_j^3,\ B_{3b} = \sum_{j=1}^{s} (p_{2j}^2 - p_{2j-1}^2) \sum_{k=1}^{2j-1} p_k$$

Exemple de relation

$$([X_3] + 4[V_{3a}] + [V_{3b}])/6 = B_1^3 - 2B_{3b} - B_{3a}$$

Structure RKN

Ecriture type RKN

$$Z''(t) = (0, E(Z(t))),\ Z(t) = (t, X(t))$$

Structure de Poisson

$$\{\{\{T, V\}_f, V\}_f, V\}_f = 0.$$

$$\dot{f} + \{\frac{\delta(T+V)}{\delta f}[f], f\} = 0.$$

Conclusion

Résultats numériques convaincants pour l'énergie

Obtention par calculs élémentaires des équations pour l'ordre ≤ 4

Conforme à la théorie générale (RKN)