Splines polynomiales comme exemples de splines de Chebyshev

Marie-Laurence Mazure

Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble

Guidel, SMAI'11 – 25 mai 2011

Plan

Plan

- Espaces de Chebyshev généralisés

Plan

- Espaces de Chebyshev généralisés
- Splines de Chebyshev

Plan

- Espaces de Chebyshev généralisés
- Splines de Chebyshev
- Splines polynomiales géométriquement continues

Plan

- Espaces de Chebyshev généralisés **(Th.A)**
- Splines de Chebyshev
- Splines polynomiales géométriquement continues

Plan

- Espaces de Chebyshev généralisés **(Th.A)**
- Splines de Chebyshev **(Th.B)**
- Splines polynomiales géométriquement continues

Plan

- Espaces de Chebyshev généralisés **(Th.A)**
- Splines de Chebyshev **(Th.B)**
- Splines polynomiales géométriquement continues ($\Leftarrow$ **A** $+$ **B**)

Espaces de Chebyshev (EC)

- généralisation naturelle des espaces de polynômes

Espaces de Chebyshev (EC)

- généralisation naturelle des espaces de polynômes
- mêmes propriétés que les espaces de polynômes (à exception près) mais **DIFFICILES A MONTRER**

- généralisation naturelle des espaces de polynômes
- mêmes propriétés que les espaces de polynômes (à exception près) mais **DIFFICILES A MONTRER**
- avantages :

- généralisation naturelle des espaces de polynômes
- mêmes propriétés que les espaces de polynômes (à exception près) mais **DIFFICILES A MONTRER**
- avantages :
  - offrent plus de possibilités en Approximation ou Design Géométrique,

Espaces de Chebyshev (EC)

- généralisation naturelle des espaces de polynômes
- mêmes propriétés que les espaces de polynômes (à exception près) mais **DIFFICILES A MONTRER**
- avantages :
  - offrent plus de possibilités en Approximation ou Design Géométrique,
  - permettent de mieux comprendre les espaces de polynômes,

Espaces de Chebyshev (EC)

- généralisation naturelle des espaces de polynômes
- mêmes propriétés que les espaces de polynômes (à exception près) mais **DIFFICILES A MONTRER**
- avantages :
  - offrent plus de possibilités en Approximation ou Design Géométrique,
  - permettent de mieux comprendre les espaces de polynômes,
  - voire d'obtenir de nouveaux résultats les concernant **ex : ICI**

I intervalle, $\mathbb{E} \subset C^n(I)$ de dimension $(n+1)$

I intervalle, $\mathbb{E} \subset C^n(I)$ de dimension $(n+1)$

Définition : $\mathbb{E}$ est un EC sur I si toute fonction $F \in \mathbb{E}$, non nulle, s'annule au plus n fois dans I, en comptant les multiplicités.

I intervalle, $\mathbb{E} \subset C^n(I)$ de dimension $(n+1)$

Définition : $\mathbb{E}$ est un EC sur I si toute fonction $F \in \mathbb{E}$, non nulle, s'annule au plus n fois dans I, en comptant les multiplicités.

Exemples :

1. $1, x, \ldots, x^{n-2}, \cosh x, \sinh x$ engendrent un EC sur $I = \mathbb{R}$;
2. $1, x, \ldots, x^{n-2}, \cos x, \sin x$ engendrent un EC sur tout $I = [a, a+2\pi[$ (pour $n \geq 2$).
3. ...

EC associés fonctions-poids

EC associés fonctions-poids

- $(w_0, \ldots, w_n)$ système de fonctions-poids sur I, *i.e.*, pour $i = 0, \ldots, n$,

$$w_i \in C^{n-i}(I) \text{ et est strictement positive sur tout } I;$$

EC associés fonctions-poids

- $(w_0, \ldots, w_n)$ système de fonctions-poids sur I, *i.e.*, pour $i = 0, \ldots, n$,

$$w_i \in C^{n-i}(I) \text{ et est strictement positive sur tout } I;$$

- dérivées généralisées associées :

$$L_0 F := \frac{F}{w_0}, \quad L_i F := \frac{DL_{i-1}F}{w_i}, \; i = 1, \ldots, n; \tag{1}$$

(D = différentiation ordinaire)

EC associés fonctions-poids

- $(w_0, \ldots, w_n)$ système de fonctions-poids sur I, *i.e.*, pour $i = 0, \ldots, n$,
$$w_i \in C^{n-i}(I) \text{ et est strictement positive sur tout } I;$$

- dérivées généralisées associées :
$$L_0 F := \frac{F}{w_0}, \quad L_i F := \frac{DL_{i-1}F}{w_i}, \; i = 1, \ldots, n; \tag{1}$$
(D = différentiation ordinaire)

- $\mathbb{E} := \{F \in C^n(I) \mid L_n F \text{ constante sur } I\}$ est un EC de dimension $(n+1)$ sur I, noté $\mathbb{E} = EC(w_0, \ldots, w_n)$

EC associés fonctions-poids

- $(w_0, \ldots, w_n)$ système de fonctions-poids sur I, *i.e.*, pour $i = 0, \ldots, n$,

$$w_i \in C^{n-i}(I) \text{ et est strictement positive sur tout } I;$$

- dérivées généralisées associées :

$$L_0 F := \frac{F}{w_0}, \quad L_i F := \frac{DL_{i-1}F}{w_i}, \; i = 1, \ldots, n; \tag{1}$$

(D = différentiation ordinaire)

- $\mathbb{E} := \{F \in C^n(I) \mid L_n F \text{ constante sur } I\}$ est un EC de dimension $(n+1)$ sur I, noté $\mathbb{E} = EC(w_0, \ldots, w_n)$

Ex : sur $I = \mathbb{R}$, pour $w_0 = w_1 = \cdots = w_n = \mathbb{1}$, $EC(w_0, \ldots, w_n) = \mathbb{P}_n$

$\mathbb{E}$= EC de dimension $(n+1)$ sur $I = [a, b]$ fermé borné

Théorème - *E peut s'écrire sous la forme* $\mathbb{E} = EC(w_0, \ldots, w_n)$

Théorème - *E peut s'écrire sous la forme* $\mathbb{E} = EC(w_0, \ldots, w_n)$

THÉORÈME A

ON PEUT DÉSORMAIS TROUVER **TOUS** LES SYTÈMES DE

FONCTIONS-POIDS SUR I TELS QUE $\mathbb{E} = EC(w_0, \ldots, w_n)$

Théorème - *E peut s'écrire sous la forme* $\mathbb{E} = EC(w_0, \ldots, w_n)$

THÉORÈME A

ON PEUT DÉSORMAIS TROUVER **TOUS** LES SYTÈMES DE

FONCTIONS-POIDS SUR I TELS QUE $\mathbb{E} = EC(w_0, \ldots, w_n)$

MLM, Finding all systems of weight functions associated with a given Extended Chebyshev space,

J. Approx. Theory, 2011

Fonctions-poids pour $\mathbb{E} :=$ restriction de $\mathbb{P}_2$ à $I := [0, 1]$

- (B_0, B_1, B_2) : base de Bernstein de degré 2

Fonctions-poids pour $\mathbb{E} :=$ restriction de $\mathbb{P}_2$ à $I := [0, 1]$

- (B_0, B_1, B_2) : base de Bernstein de degré 2
- Prendre $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ quelconques, et $w_0 := \sum_{i=0}^{2} \alpha_i B_i$

Fonctions-poids pour $\mathbb{E} :=$ restriction de $\mathbb{P}_2$ à $I := [0, 1]$

- (B_0, B_1, B_2) : base de Bernstein de degré 2
- Prendre $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ quelconques, et $w_0 := \sum_{i=0}^{2} \alpha_i B_i$
- $\mathbb{1} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\alpha_i B_i}{w_0} \to$ base de Bernstein de $L_0\mathbb{E} := \{\frac{F}{w_0} \mid F \in \mathbb{E}\}$

- (B_0, B_1, B_2) : base de Bernstein de degré 2
- Prendre $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ quelconques, et $w_0 := \sum_{i=0}^{2} \alpha_i B_i$
- $\mathbb{I} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\alpha_i B_i}{w_0} \rightarrow$ base de Bernstein de $L_0\mathbb{E} := \{\frac{F}{w_0} \mid F \in \mathbb{E}\}$
- $DL_0\mathbb{E}$= EC de dimension 2 sur I, base de type Bernstein

$$V_0 := -D\left(\frac{\alpha_0 B_0}{w_0}\right), \quad V_1 := D\left(\frac{\alpha_1 B_1}{w_0}\right)$$

- (B_0, B_1, B_2) : base de Bernstein de degré 2
- Prendre $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ quelconques, et $w_0 := \sum_{i=0}^{2} \alpha_i B_i$
- $\mathbb{1} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\alpha_i B_i}{w_0} \to$ base de Bernstein de $L_0\mathbb{E} := \{\frac{F}{w_0} \mid F \in \mathbb{E}\}$
- $DL_0\mathbb{E}$= EC de dimension 2 sur I, base de type Bernstein

$$V_0 := -D\left(\frac{\alpha_0 B_0}{w_0}\right), \quad V_1 := D\left(\frac{\alpha_1 B_1}{w_0}\right)$$

- Prendre $\beta_0, \beta_1 > 0$ quelconques, et $w_1 := \sum_{i=0}^{1} \beta_i V_i$

- $\mathbb{I} = \sum_{i=0}^{1} \frac{\beta_i V_i}{w_1} \longrightarrow$ base de Bern. de $L_1\mathbb{E} := \{\frac{F}{w_1} \mid F \in DL_0\mathbb{E}\}$

Fonctions-poids pour $\mathbb{E} :=$ restriction de $\mathbb{P}_2$ à $I := [0, 1]$

- $\mathbb{1} = \sum_{i=0}^{1} \frac{\beta_i V_i}{w_1} \rightarrow$ base de Bern. de $L_1\mathbb{E} := \{\frac{F}{w_1} \mid F \in DL_0\mathbb{E}\}$
- $DL_1\mathbb{E} :=$ EC de dimension 1 sur I, base (de type Bernstein)

$$\overline{V}_0 := D\left(\frac{\beta_1 V_1}{w_1}\right)$$

- $\mathbb{1} = \sum_{i=0}^{1} \frac{\beta_i V_i}{w_1} \rightarrow$ base de Bern. de $L_1\mathbb{E} := \{\frac{F}{w_1} \mid F \in DL_0\mathbb{E}\}$
- $DL_1\mathbb{E}$:= EC de dimension 1 sur I, base (de type Bernstein)

$$\overline{V}_0 := D\left(\frac{\beta_1 V_1}{w_1}\right)$$

- Prendre $\gamma_0 > 0$ quelconque et $w_2 := \gamma_0 \overline{V}_0$

- $\mathbb{1} = \sum_{i=0}^{1} \frac{\beta_i V_i}{w_1} \rightarrow$ base de Bern. de $L_1\mathbb{E} := \{\frac{F}{w_1} \mid F \in DL_0\mathbb{E}\}$
- $DL_1\mathbb{E}$:= EC de dimension 1 sur I, base (de type Bernstein)

$$\overline{V}_0 := D\left(\frac{\beta_1 V_1}{w_1}\right)$$

- Prendre $\gamma_0 > 0$ quelconque et $w_2 := \gamma_0 \overline{V}_0$
- **Théorème** - *On obtient ainsi* **toutes les façons** *d'écrire* $\mathbb{E}$ *sous la forme*

$$\mathbb{E} = EC(w_0, w_1, w_2).$$

Splines de Chebyshev : ingrédients

1. une suite de noeuds $t_k < t_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$;

Splines de Chebyshev : ingrédients

1. une suite de noeuds $t_k < t_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$;

2. une suite d'espaces-sections : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}_k \subset C^n([t_k, t_{k+1}])$ contient les constantes et $D\mathbb{E}_k$ est un EC de dimension n sur $[t_k, t_{k+1}]$;

Splines de Chebyshev : ingrédients

1. une suite de noeuds $t_k < t_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$;
2. une suite d'espaces-sections : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}_k \subset C^n([t_k, t_{k+1}])$ contient les constantes et $D\mathbb{E}_k$ est un EC de dimension n sur $[t_k, t_{k+1}]$;
3. une suite M_k, $k \in \mathbb{Z}$, de matrices de connexion : pour tout $k \in \mathbb{Z}$, M_k est une matrice triangulaire inférieure d'ordre $(n-1)$ à diagonale strictement positive.

Espace de splines $\mathbb{S}$ associé = ensemble des fonctions continues $S :]\mathrm{Inf}_k t_k, \mathrm{Sup}_k t_k[\to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

Splines de Chebyshev : définition

Espace de splines $\mathbb{S}$ associé = ensemble des fonctions continues $S :]\mathrm{Inf}_k t_k, \mathrm{Sup}_k t_k[\to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

1. la restriction de S à $[t_k, t_{k+1}]$ est dans $\mathbb{E}_k$;

Splines de Chebyshev : définition

Espace de splines $\mathbb{S}$ associé = ensemble des fonctions continues $S :]\mathrm{Inf}_k t_k, \mathrm{Sup}_k t_k[\to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

1. la restriction de S à $[t_k, t_{k+1}]$ est dans $\mathbb{E}_k$;
2. S satisfait en t_k les conditions

$$\left(S'(t_k^+), \ldots, S^{(n-1)}(t_k{}^+)\right)^T = M_k\left(S'(t_k^-) \ldots, S^{(n-1)}(t_k{}^-)\right)^T.$$

Espace de splines $\mathbb{S}$ associé = ensemble des fonctions continues $S :]\mathrm{Inf}_k t_k, \mathrm{Sup}_k t_k[\to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

1. la restriction de S à $[t_k, t_{k+1}]$ est dans $\mathbb{E}_k$;
2. S satisfait en t_k les conditions

$$\left(S'(t_k^+), \ldots, S^{(n-1)}({t_k}^+)\right)^T = M_k \left(S'(t_k^-) \ldots, S^{(n-1)}({t_k}^-)\right)^T.$$

Exemple - pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}_k$:=restriction de $\mathbb{P}_n$ à $[t_k, t_{k+1}]$:

Splines de Chebyshev : définition

Espace de splines $\mathbb{S}$ associé = ensemble des fonctions continues $S :]\mathrm{Inf}_k t_k, \mathrm{Sup}_k t_k[\to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

1. la restriction de S à $[t_k, t_{k+1}]$ est dans $\mathbb{E}_k$;
2. S satisfait en t_k les conditions

$$\left(S'(t_k^+), \dots, S^{(n-1)}(t_k{}^+)\right)^T = M_k\left(S'(t_k^-) \dots, S^{(n-1)}(t_k{}^-)\right)^T.$$

Exemple - pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}_k$:=restriction de $\mathbb{P}_n$ à $[t_k, t_{k+1}]$:

$$\downarrow$$

splines polynomiales géométriquement continues

Espaces de splines “bons pour le design"

- Critères :

- Critères :
  1. contrôle local : fonctions de base à support minimal ;

Espaces de splines “bons pour le design"

- Critères :

  1. contrôle local : fonctions de base à support minimal ;
  2. "bon" contrôle : base normalisée et totalement positive ;

Espaces de splines “bons pour le design"

- Critères :

  1. contrôle local : fonctions de base à support minimal ;
  2. "bon" contrôle : base normalisée et totalement positive ;
  3. développement de tous les algorithmes de design.

Espaces de splines “bons pour le design"

- Critères :
  1. contrôle local : fonctions de base à support minimal ;
  2. "bon" contrôle : base normalisée et totalement positive ;
  3. développement de tous les algorithmes de design.
- Se résument en :

EXISTENCE DE FLORAISONS DANS $\mathbb{S}$

TOUS les bons espaces de splines

TOUS les bons espaces de splines

- **Ingrédients :** prendre, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

TOUS les bons espaces de splines

- **Ingrédients :** prendre, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
  1. $(w_1^k, \ldots, w_n^k)$: système de fonctions-poids sur $[t_k, t_{k+1}]$;

TOUS les bons espaces de splines

- **Ingrédients :** prendre, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
  1. $(w_1^k, \dots, w_n^k)$: système de fonctions-poids sur $[t_k, t_{k+1}]$;
  2. $\mathbb{E}_k := EC(\mathbb{1}_k, w_1^k, \dots, w_n^k)$;

TOUS les bons espaces de splines

- **Ingrédients :** prendre, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
  1. $(w_1^k, \dots, w_n^k)$: système de fonctions-poids sur $[t_k, t_{k+1}]$;
  2. $\mathbb{E}_k := EC(\mathbb{1}_k, w_1^k, \dots, w_n^k)$;
  3. $L_0^k = Id_k, L_1^k, \dots, L_n^k$ dérivées généralisées associées ;

TOUS les bons espaces de splines

- **Ingrédients :** prendre, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
  1. $(w_1^k, \dots, w_n^k)$: système de fonctions-poids sur $[t_k, t_{k+1}]$;
  2. $\mathbb{E}_k := EC(\mathbb{1}_k, w_1^k, \dots, w_n^k)$;
  3. $L_0^k = Id_k, L_1^k, \dots, L_n^k$ dérivées généralisées associées ;
- **Définir** $\mathbb{S}$ comme précédemment **mais avec les relations de connexion :**

TOUS les bons espaces de splines

- **Ingrédients :** prendre, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
  1. $(w_1^k, \ldots, w_n^k)$: système de fonctions-poids sur $[t_k, t_{k+1}]$;
  2. $\mathbb{E}_k := EC(\mathbb{1}_k, w_1^k, \ldots, w_n^k)$;
  3. $L_0^k = Id_k, L_1^k, \ldots, L_n^k$ dérivées généralisées associées ;

- **Définir** $\mathbb{S}$ comme précédemment **mais avec les relations de connexion :**

$$\left(L_1^k S(t_k^+), \ldots, L_{n-1}^k S(t_k^+)\right)^T = \left(L_1^{k-1} S(t_k^-), \ldots, L_{n-1}^{k-1} S(t_k{}^-)\right)^T,$$

TOUS les bons espaces de splines

THÉORÈME B

THÉORÈME B

ON OBTIENT AINSI **TOUS** LES ESPACES DE SPLINES DE

CHEBYSHEV BONS POUR LE DESIGN

THÉORÈME B

ON OBTIENT AINSI **TOUS** LES ESPACES DE SPLINES DE CHEBYSHEV BONS POUR LE DESIGN

(MLM, How to build all Chebyshevian spline spaces good for Geometric Design, preprint)

THÉORÈME B

ON OBTIENT AINSI TOUS LES ESPACES DE SPLINES DE CHEBYSHEV BONS POUR LE DESIGN

(MLM, How to build all Chebyshevian spline spaces good for Geometric Design, preprint)

Remarques : • P.J. Barry, Constr. Approx., 96, connexions

$$(L_1^k S(t_k^+), \dots, L_{n-1}^k S(t_k^+))^T = \widehat{M}_k (L_1^{k-1} S(t_k^-), \dots, L_{n-1}^{k-1} S(t_k^-))^T,$$

$\widehat{M}_k$ totalement positive (TP, *i.e.*, tous les mineurs sont ≥ 0) pour tout k + ... $\Rightarrow$ $\mathbb{S}$ bon pour le design

THÉORÈME B

ON OBTIENT AINSI TOUS LES ESPACES DE SPLINES DE CHEBYSHEV BONS POUR LE DESIGN

(MLM, How to build all Chebyshevian spline spaces good for Geometric Design, preprint)

Remarques : • P.J. Barry, Constr. Approx., 96, connexions

$$\left(L_1^k S(t_k^+), \ldots, L_{n-1}^k S(t_k^+)\right)^T = \widehat{M}_k \left(L_1^{k-1} S(t_k^-), \ldots, L_{n-1}^{k-1} S(t_k{}^-)\right)^T,$$

$\widehat{M}_k$ totalement positive (TP, *i.e.*, tous les mineurs sont ≥ 0) pour tout k + ... $\Rightarrow \mathbb{S}$ bon pour le design

• Cas polynomial (M_k TP pour tout k) : TNT Goodman (85) et N. Dyn+C. Micchelli (88)

Question : peut-on trouver des systèmes de fonctions-poids $(w_1^k, \ldots, w_n^k)$ sur $[t_k, t_{k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}$, tels que :

Splines polynomiales géométriquement continues

Question : peut-on trouver des systèmes de fonctions-poids $(w_1^k, \ldots, w_n^k)$ sur $[t_k, t_{k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}$, tels que :

1. pour tout k, $EC(\mathbb{1}_k, w_1^k, \ldots, w_n^k) =$ restriction de $\mathbb{P}_n$ à $[t_k, t_{k+1}]$;

Splines polynomiales géométriquement continues

Question : peut-on trouver des systèmes de fonctions-poids $(w_1^k, \ldots, w_n^k)$ sur $[t_k, t_{k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}$, tels que :

1. pour tout k, $EC(\mathbb{1}_k, w_1^k, \ldots, w_n^k)$ = restriction de $\mathbb{P}_n$ à $[t_k, t_{k+1}]$;
2. pour tout k, les connexions

$$\left(L_1^k S(t_k^+), \ldots, L_{n-1}^k S(t_k^+)\right)^T = \left(L_1^{k-1} S(t_k^-), \ldots, L_{n-1}^{k-1} S(t_k{}^-)\right)^T,$$

et

$$\left(S'(t_k^+), \ldots, S^{(n-1)}(t_k{}^+)\right)^T = M_k \left(S'(t_k^-) \ldots, S^{(n-1)}(t_k{}^-)\right)^T.$$

soient équivalentes ?

- matrices de connexion $M_k = \begin{bmatrix} a_k & 0 \\ b_k & c_k \end{bmatrix}$, $a_k, c_k > 0$.

- matrices de connexion $M_k = \begin{bmatrix} a_k & 0 \\ b_k & c_k \end{bmatrix}$, $a_k, c_k > 0$.

Théorème

$\mathbb{S}$ bon pour le design $\quad\Leftrightarrow\quad$ $b_k + 2(a_k + c_k) > 0$ *pour tout* k.

Splines polynomiales géométriquement continues degré 3

- matrices de connexion $M_k = \begin{bmatrix} a_k & 0 \\ b_k & c_k \end{bmatrix}$, $a_k, c_k > 0$.

  Théorème

  $\mathbb{S}$ *bon pour le design* $\quad \Leftrightarrow \quad$ $b_k + 2(a_k + c_k) > 0$ *pour tout* k.

- Comparaison avec TP des M_k : $b_k \geq 0$

- matrices de connexion $M_k = \begin{bmatrix} a_k & 0 \\ b_k & c_k \end{bmatrix}$, $a_k, c_k > 0$.

  Théorème

  $\mathbb{S}$ *bon pour le design* $\Leftrightarrow$ $b_k + 2(a_k + c_k) > 0$ *pour tout* k.

- Comparaison avec TP des M_k : $b_k \geq 0$
- Ex : $a_k = 1,\ c_k = 9,\ b_k > -20$ au lieu de $b_k \geq 0$.

- matrices de connexion $M_k = \begin{bmatrix} a_k & 0 & 0 \\ b_k & c_k & 0 \\ d_k & e_k & f_k \end{bmatrix}$, $a_k, c_k, f_k > 0$.

- matrices de connexion $M_k = \begin{bmatrix} a_k & 0 & 0 \\ b_k & c_k & 0 \\ d_k & e_k & f_k \end{bmatrix}$, $a_k, c_k, f_k > 0$.

Théorème

$\mathbb{S}$ *bon pour le design* $\Leftrightarrow$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\begin{cases} B_k := b_k + 3(a_k + c_k) > 0 \\ E_k := e_k + 4(c_k + f_k) > 0 \\ -A_k < d_k < \frac{B_k E_k}{c_k} - A_k \end{cases}, \quad A_k := 4b_k + 3e_k + 6(a_k + 2c_k + f_k).$$

- matrices de connexion $M_k = \begin{bmatrix} a_k & 0 & 0 \\ b_k & c_k & 0 \\ d_k & e_k & f_k \end{bmatrix}$, $a_k, c_k, f_k > 0$.

  Théorème

  $\mathbb{S}$ *bon pour le design* $\Leftrightarrow$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\begin{cases} B_k := b_k + 3(a_k + c_k) > 0 \\ E_k := e_k + 4(c_k + f_k) > 0 \\ -A_k < d_k < \frac{B_k E_k}{c_k} - A_k \end{cases}, \quad A_k := 4b_k + 3e_k + 6(a_k + 2c_k + f_k).$$

- Comparaison avec TP des M_k : $\begin{cases} b_k \geq 0 \\ e_k \geq 0 \\ 0 \leq d_k \leq \frac{b_k e_k}{c_k} \end{cases}$

- matrices de connexion $M_k = \begin{bmatrix} a_k & 0 & 0 \\ b_k & c_k & 0 \\ d_k & e_k & f_k \end{bmatrix}$, $a_k, c_k, f_k > 0$.

  Théorème

  $\mathbb{S}$ bon pour le design $\Leftrightarrow$ *pour tout $k \in \mathbb{Z}$:*

$$\begin{cases} B_k := b_k + 3(a_k + c_k) > 0 \\ E_k := e_k + 4(c_k + f_k) > 0 \\ -A_k < d_k < \frac{B_k E_k}{c_k} - A_k \end{cases}, \quad A_k := 4b_k + 3e_k + 6(a_k + 2c_k + f_k).$$

- Comparaison avec TP des M_k : $\begin{cases} b_k \geq 0 \\ e_k \geq 0 \\ 0 \leq d_k \leq \frac{b_k e_k}{c_k} \end{cases}$
- Ex : $b_k = e_k = 0$, $a_k = c_k = f_k = 1$

- matrices de connexion $M_k = \begin{bmatrix} a_k & 0 & 0 \\ b_k & c_k & 0 \\ d_k & e_k & f_k \end{bmatrix}$, $a_k, c_k, f_k > 0$.

  Théorème

  $\mathbb{S}$ *bon pour le design* $\Leftrightarrow$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *:*

  $$\begin{cases} B_k := b_k + 3(a_k + c_k) > 0 \\ E_k := e_k + 4(c_k + f_k) > 0 \\ -A_k < d_k < \frac{B_k E_k}{c_k} - A_k \end{cases}, \quad A_k := 4b_k + 3e_k + 6(a_k + 2c_k + f_k).$$

- Comparaison avec TP des M_k : $\begin{cases} b_k \geq 0 \\ e_k \geq 0 \\ 0 \leq d_k \leq \frac{b_k e_k}{c_k} \end{cases}$
- Ex : $b_k = e_k = 0$, $a_k = c_k = f_k = 1$
  1. TP : $d_k = 0$

- matrices de connexion $M_k = \begin{bmatrix} a_k & 0 & 0 \\ b_k & c_k & 0 \\ d_k & e_k & f_k \end{bmatrix}$, $a_k, c_k, f_k > 0$.

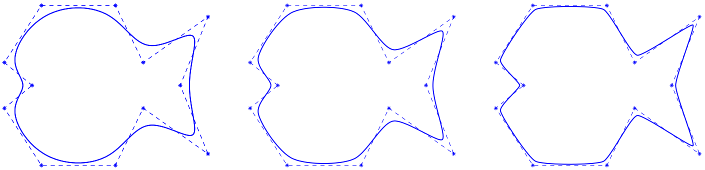
  Théorème

  $\mathbb{S}$ *bon pour le design* $\Leftrightarrow$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *:*

$$\begin{cases} B_k := b_k + 3(a_k + c_k) > 0 \\ E_k := e_k + 4(c_k + f_k) > 0 \\ -A_k < d_k < \frac{B_k E_k}{c_k} - A_k \end{cases}, \quad A_k := 4b_k + 3e_k + 6(a_k + 2c_k + f_k).$$

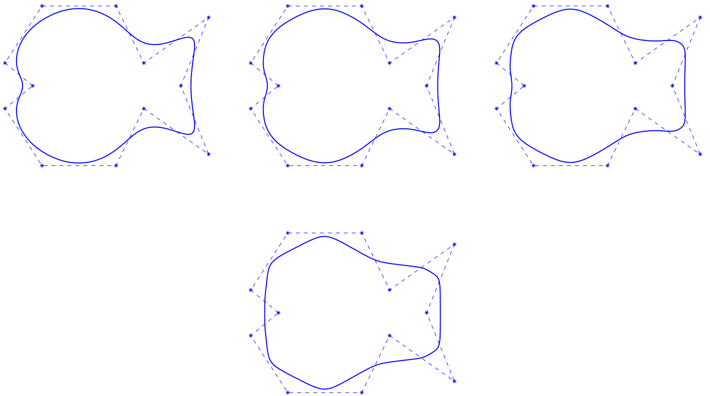
- Comparaison avec TP des M_k : $\begin{cases} b_k \geq 0 \\ e_k \geq 0 \\ 0 \leq d_k \leq \frac{b_k e_k}{c_k} \end{cases}$
- Ex : $b_k = e_k = 0$, $a_k = c_k = f_k = 1$
  1. TP : $d_k = 0$
  2. CNS du Th : $-24 < d_k < 24$! !

Splines polynomiales géométriquement continues degré 3

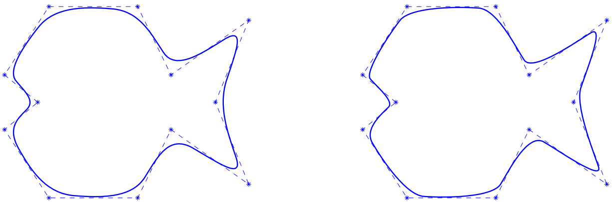


En chaque nœud, matrice de connexion $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, avec, de gauche à droite $b = 0\ ;\ 4\ ;\ 16$.

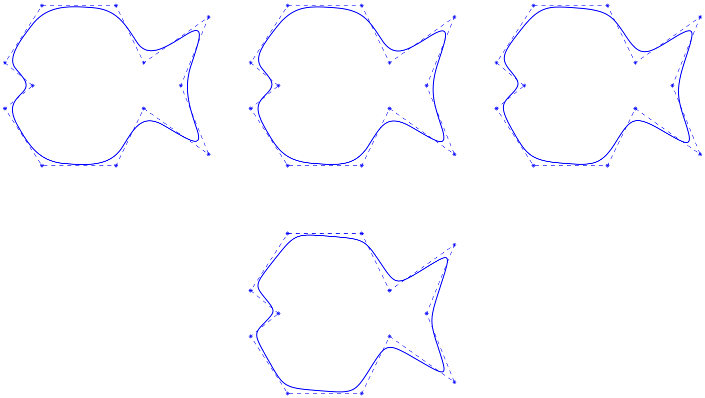
Splines polynomiales géométriquement continues degré 3



En chaque nœud, matrice de connexion $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, avec, de gauche à droite $b = -1\ ;\ -2\ ;\ -3\ ;\ -3,9$.

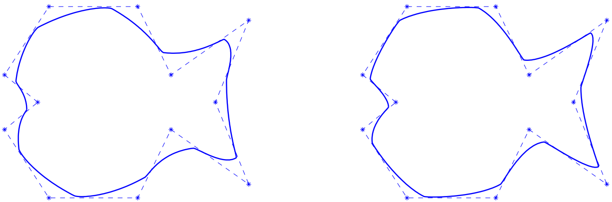


$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 9 \end{bmatrix},\ b = 0\ ;\ 30.$$

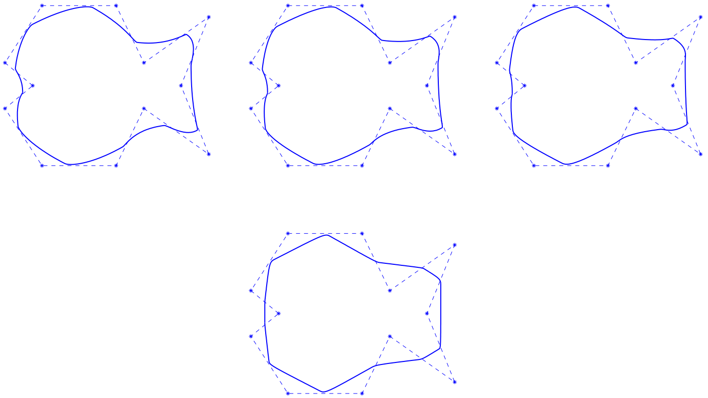


$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 9 \end{bmatrix},\ b = -5\ ;\ -10\ ;\ -15\ ;\ -19,9.$$

Splines polynomiales géométriquement continues degré 3



$$M = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix},\ b = 0\ ;\ 30.$$



$$M = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix},\ b = -5\ ;\ -10\ ;\ -15\ ;\ -19,9.$$

C'EST FINI !