Une méthode de relaxation pour le modèle de Baer–Nunziato en configuration isentropique

Khaled Saleh

Laboratoire Jacques-Louis Lions UPMC,
EDF R&D Département MFEE,

Congrès SMAI 2011.

Introduction

Travail réalisé en collaboration avec

Frédéric Coquel, Jean-Marc Hérard & Nicolas Seguin.

Objectifs de la thèse:

Dans le cadre de l'étude des écoulements diphasiques pour les coeurs de réacteurs nucléaires,

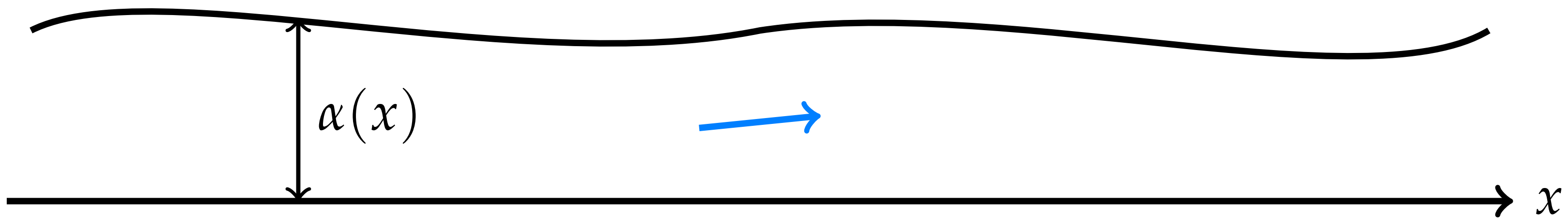
- ▷ Etude et hiérarchisation de différents modèles (homogènes, bifluides...),
- ▷ Développement de schémas numériques adaptés (changement de régime dominant, phase évanescente, problèmes de résonance, termes sources de relaxation...)

Plan de l’exposé

- Un modèle "jouet": les équations d’Euler en section variable,
- Le modèle de Baer & Nunziato et ses propriétés,
- Une approximation par relaxation pour le modèle de Baer & Nunziato,
- Le problème de Riemann pour le système de relaxation,
- Conclusion et perspectives.

Un modèle "jouet"

Équations d'Euler en section variable:

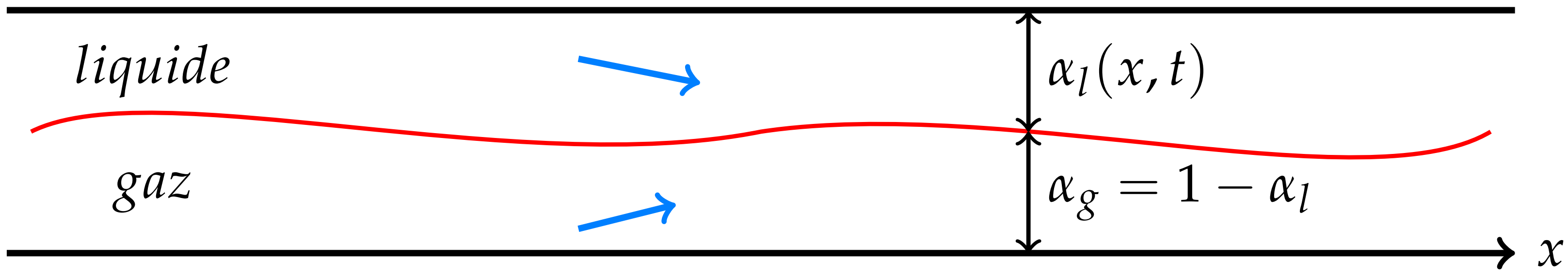


$$\partial_t(\alpha\rho) + \partial_x(\alpha\rho w) = 0,$$

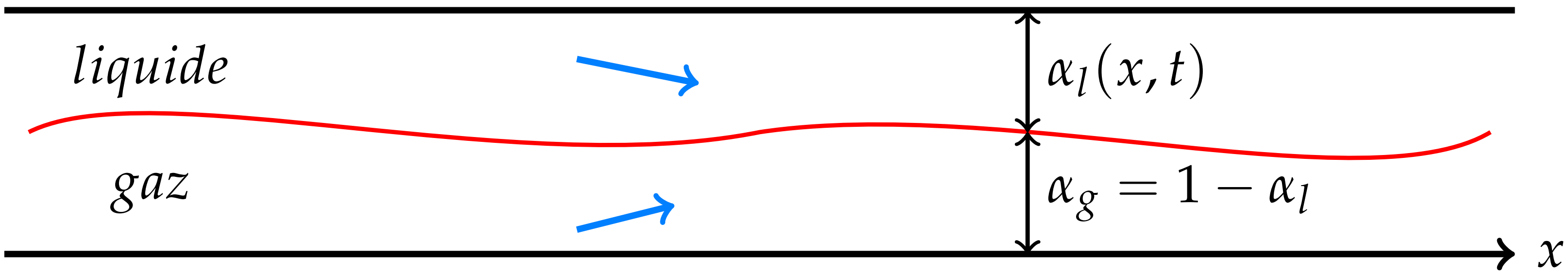
$$\partial_t(\alpha\rho w) + \partial_x(\alpha\rho w^2 + \alpha p(\rho)) - p(\rho)\partial_x\alpha = 0,$$

ρ densité,
w vitesse,
$\rho \mapsto p(\rho)$ loi de pression barotope.

Modèle de Baer & Nunziato



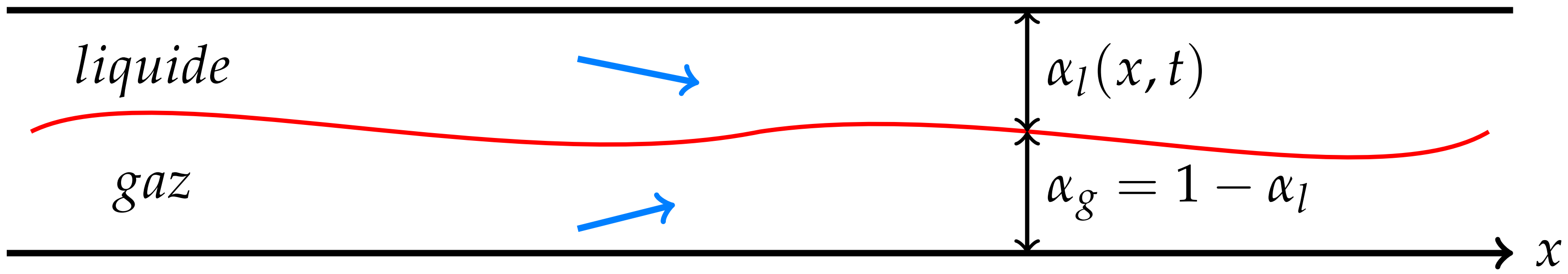
Modèle de Baer & Nunziato



$$\partial_t(\alpha_l \rho_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l) = 0$$

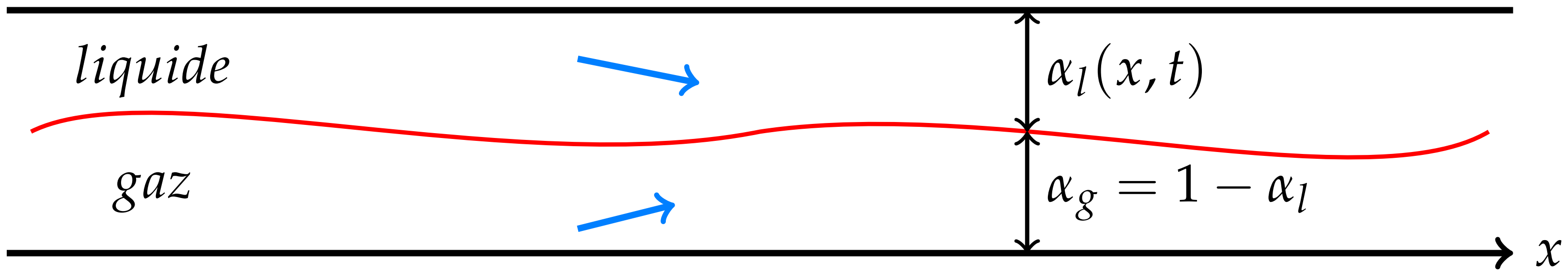
$$\partial_t(\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_i \partial_x \alpha_l =$$

Modèle de Baer & Nunziato



$$
\begin{aligned}
&\partial_t(\alpha_l\rho_l) + \partial_x(\alpha_l\rho_l u_l) = 0\\
&\partial_t(\alpha_l\rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l\rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_i\partial_x\alpha_l =\\
&\partial_t(\alpha_g\rho_g) + \partial_x(\alpha_g\rho_g u_g) = 0\\
&\partial_t(\alpha_g\rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g\rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_i\partial_x\alpha_g =
\end{aligned}
$$

Modèle de Baer & Nunziato



$$\partial_t \alpha_l + v_i \cdot \partial_x \alpha_l =$$

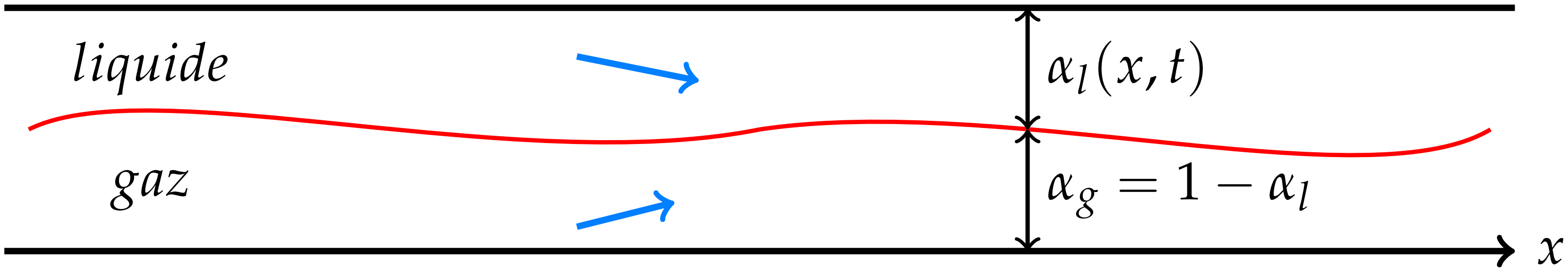
$$\partial_t(\alpha_l \rho_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l) = 0$$

$$\partial_t(\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_i \partial_x \alpha_l =$$

$$\partial_t(\alpha_g \rho_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g) = 0$$

$$\partial_t(\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_i \partial_x \alpha_g =$$

Modèle de Baer & Nunziato



$$\partial_t \alpha_l + v_i \cdot \partial_x \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g)$$

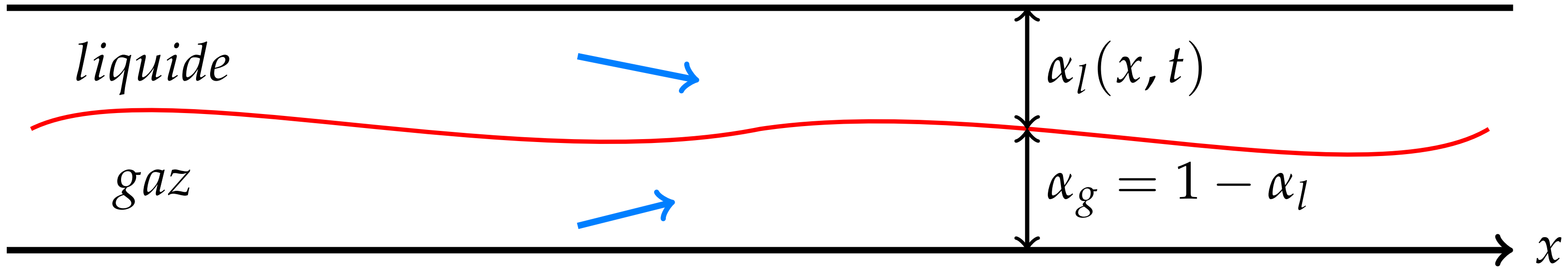
$$\partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) = 0$$

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_i \partial_x \alpha_l = \Theta_u (u_g - u_l)$$

$$\partial_t (\alpha_g \rho_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g) = 0$$

$$\partial_t (\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_i \partial_x \alpha_g = \Theta_u (u_l - u_g)$$

Modèle de Baer & Nunziato

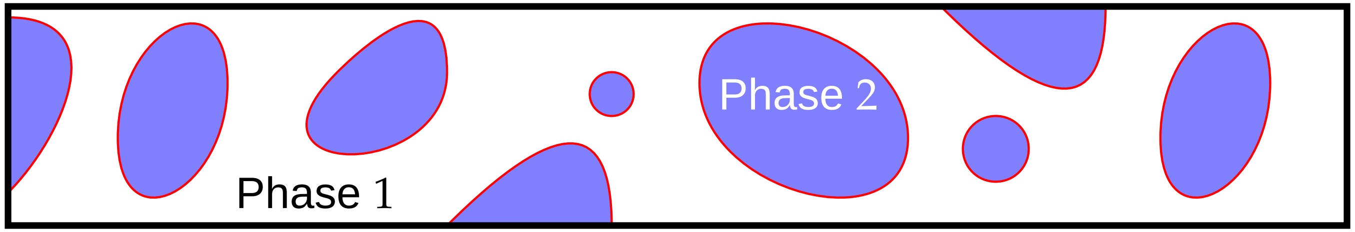


$$
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + v_i \cdot \partial_x \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g)\\
&\partial_t(\alpha_l\rho_l) + \partial_x(\alpha_l\rho_l u_l) = 0\\
&\partial_t(\alpha_l\rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l\rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_i \partial_x \alpha_l = \Theta_u (u_g - u_l)\\
&\partial_t(\alpha_g\rho_g) + \partial_x(\alpha_g\rho_g u_g) = 0\\
&\partial_t(\alpha_g\rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g\rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_i \partial_x \alpha_g = \Theta_u (u_l - u_g)
\end{aligned}
$$

$\Theta_p > 0$ et $\Theta_u > 0$ coefficients de relaxation en vitesse et pression relatives $u_l - u_g$ et $p_l - p_g$.

(v_i, p_i) vitesse et pression d'interface,

Modèle de Baer & Nunziato



$$\partial_t \alpha_l + v_i \cdot \partial_x \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g)$$

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) = 0$$

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_i \partial_x \alpha_l = \Theta_u (u_g - u_l)$$

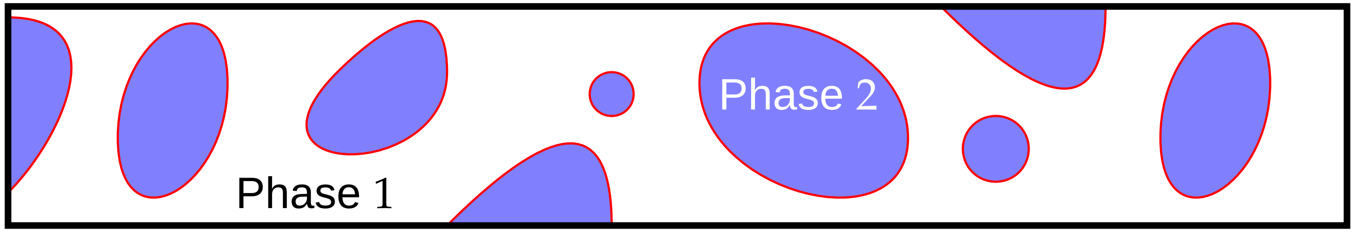
$$\partial_t (\alpha_g \rho_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g) = 0$$

$$\partial_t (\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_i \partial_x \alpha_g = \Theta_u (u_l - u_g)$$

$\Theta_p > 0$ et $\Theta_u > 0$ coefficients de relaxation en vitesse et pression relatives $u_l - u_g$ et $p_l - p_g$.

(v_i, p_i) vitesse et pression d'interface,

Modèle de Baer & Nunziato



$$\partial_t \alpha_l + v_i \cdot \partial_x \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g)$$

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) = 0$$

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_i \partial_x \alpha_l = \Theta_u (u_g - u_l)$$

$$\partial_t (\alpha_g \rho_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g) = 0$$

$$\partial_t (\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_i \partial_x \alpha_g = \Theta_u (u_l - u_g)$$

$\Theta_p > 0$ et $\Theta_u > 0$ coefficients de relaxation en vitesse et pression relatives $u_l - u_g$ et $p_l - p_g$.

(v_i, p_i) vitesse et pression d'interface, $(v_i, p_i) = (u_g, p_l)$.

Modèle de Baer & Nunziato: Principales propriétés

$$
(\mathscr{S}) \quad
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g) \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = \Theta_u (u_g - u_l) \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = \Theta_u (u_l - u_g)
\end{aligned}
$$

Modèle de Baer & Nunziato: Principales propriétés

$$(\mathscr{H}) \quad \begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0 \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = 0 \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = 0
\end{aligned}$$

Modèle de Baer & Nunziato: Principales propriétés

$$(\mathscr{H}) \qquad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0 \\ &\partial_t(\alpha_l \rho_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l) = 0 \\ &\partial_t(\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = 0 \\ &\partial_t(\alpha_g \rho_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \\ &\partial_t(\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = 0 \end{aligned}$$

Proposition. (Hyperbolicité) *Le système $(\mathscr{H})$ admet les valeurs propres suivantes*

$$u_g \quad LD,$$

$$u_l - c_l : \quad VNL, \qquad u_g - c_g : \quad VNL, \qquad u_g + c_g : \quad VNL, \qquad u_l + c_l : \quad VNL$$

avec $c_l = \sqrt{\partial_\rho p_l(\rho_l)}$ *et* $c_g = \sqrt{\partial_\rho p_g(\rho_g)}$ *.*

Le système est hyperbolique si, et seulement si, $|u_l - u_g| \neq c_l$*.*

Modèle de Baer & Nunziato: Principales propriétés

$$(\mathscr{H}) \qquad \begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0 \\
&\partial_t(\alpha_l \rho_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l) = 0 \\
&\partial_t(\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = 0 \\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = 0
\end{aligned}$$

Proposition. (Entropie) *Les solutions régulières de $(\mathscr{H})$ satisfont l'équation de conservation*

$$\partial_t(\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_g \rho_g E_g) + \partial_x(\alpha_l \rho_l E_l u_l + \alpha_g \rho_g E_g u_g + \alpha_l p_l u_l + \alpha_g p_g u_g) = 0.$$

avec $E_l = \frac{u_l^2}{2} + e_l$ *et* $E_g = \frac{u_g^2}{2} + e_g$.

Modèle de Baer & Nunziato: Principales propriétés

$$(\mathscr{S}) \qquad \begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g) \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = \Theta_u (u_g - u_l) \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = \Theta_u (u_l - u_g)
\end{aligned}$$

Proposition. (Entropie) *Les solutions régulières de $(\mathscr{H})$ satisfont l'équation de conservation*

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_g \rho_g E_g) + \partial_x (\alpha_l \rho_l E_l u_l + \alpha_g \rho_g E_g u_g + \alpha_l p_l u_l + \alpha_g p_g u_g) = 0.$$

avec $E_l = \frac{u_l^2}{2} + e_l$ *et* $E_g = \frac{u_g^2}{2} + e_g$.

Modèle de Baer & Nunziato: Principales propriétés

$$
(\mathscr{S}) \quad
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g)\\
&\partial_t(\alpha_l \rho_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l) = 0\\
&\partial_t(\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = \Theta_u (u_g - u_l)\\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g) = 0\\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = \Theta_u (u_l - u_g)
\end{aligned}
$$

Proposition. (Entropie) *Les solutions régulières de $(\mathscr{H})$ satisfont l'équation de conservation*

$$\partial_t(\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_g \rho_g E_g) + \partial_x(\alpha_l \rho_l E_l u_l + \alpha_g \rho_g E_g u_g + \alpha_l p_l u_l + \alpha_g p_g u_g) = 0.$$

avec $E_l = \frac{u_l^2}{2} + e_l$ *et* $E_g = \frac{u_g^2}{2} + e_g$.

Les solutions régulières de $(\mathscr{S})$ satisfont l''equation

$$\partial_t(\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_g \rho_g E_g) + \partial_x(\alpha_l \rho_l E_l u_l + \alpha_g \rho_g E_g u_g + \alpha_l p_l u_l + \alpha_g p_g u_g) = -\Theta_p (p_l - p_g)^2 - \Theta_u (u_l - u_g)^2.$$

Modèle de Baer & Nunziato: Principales propriétés

$$(\mathscr{H}) \quad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0 \\ &\partial_t(\alpha_l \rho_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l) = 0 \\ &\partial_t(\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = 0 \\ &\partial_t(\alpha_g \rho_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \\ &\partial_t(\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = 0 \end{aligned}$$

Proposition. (Entropie) *Les solutions faibles entropiques de* $(\mathscr{H})$ *satisfont l'inégalité d'entropie*

$$\partial_t(\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_g \rho_g E_g) + \partial_x(\alpha_l \rho_l E_l u_l + \alpha_g \rho_g E_g u_g + \alpha_l p_l u_l + \alpha_g p_g u_g) \leqslant 0.$$

Modèle de Baer & Nunziato: Principales propriétés

$$
(\mathscr{S}) \qquad
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g) \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = \Theta_u (u_g - u_l) \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = \Theta_u (u_l - u_g)
\end{aligned}
$$

Proposition. (Entropie) *Les solutions faibles entropiques de $(\mathscr{H})$ satisfont l'inégalité d'entropie*

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_g \rho_g E_g) + \partial_x (\alpha_l \rho_l E_l u_l + \alpha_g \rho_g E_g u_g + \alpha_l p_l u_l + \alpha_g p_g u_g) \leqslant 0.$$

Modèle de Baer & Nunziato: Principales propriétés

$$(\mathscr{S}) \quad \begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g) \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = \Theta_u (u_g - u_l) \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = \Theta_u (u_l - u_g)
\end{aligned}$$

Proposition. (Entropie) *Les solutions faibles entropiques de* $(\mathscr{H})$ *satisfont l'inégalité d'entropie*

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_g \rho_g E_g) + \partial_x (\alpha_l \rho_l E_l u_l + \alpha_g \rho_g E_g u_g + \alpha_l p_l u_l + \alpha_g p_g u_g) \leqslant 0.$$

Les solutions faibles entropiques de $(\mathscr{S})$ *satisfont l'inégalité*

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_g \rho_g E_g) + \partial_x (\alpha_l \rho_l E_l u_l + \alpha_g \rho_g E_g u_g + \alpha_l p_l u_l + \alpha_g p_g u_g) \leqslant -\Theta_p (p_l - p_g)^2 - \Theta_u (u_l - u_g)^2.$$

Modèle de Baer & Nunziato: Principales propriétés

$$(\mathscr{S}) \qquad \begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g) \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x (\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = \Theta_u (u_g - u_l) \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g) = 0 \\
&\partial_t (\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x (\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = \Theta_u (u_l - u_g)
\end{aligned}$$

Proposition. (Entropie) *Les solutions faibles entropiques de $(\mathscr{H})$ satisfont l'inégalité d'entropie*

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_g \rho_g E_g) + \partial_x (\alpha_l \rho_l E_l u_l + \alpha_g \rho_g E_g u_g + \alpha_l p_l u_l + \alpha_g p_g u_g) \leqslant 0.$$

Les solutions faibles entropiques de $(\mathscr{S})$ satisfont l'inégalité

$$\partial_t (\alpha_l \rho_l E_l + \alpha_g \rho_g E_g) + \partial_x (\alpha_l \rho_l E_l u_l + \alpha_g \rho_g E_g u_g + \alpha_l p_l u_l + \alpha_g p_g u_g) \leqslant -\Theta_p (p_l - p_g)^2 - \Theta_u (u_l - u_g)^2.$$

Relaxation $\approx$ Dissipation $\approx$ Stabilisation

Yong, Chen-Livermore-Liu, Liu, Natalini, Hanouzet-Natalini, Whitham...

Modèle de Baer & Nunziato: Stratégie numérique

Splitting d'opérateur

$$\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0$$

$$\partial_t(\alpha_l \rho_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l) = 0$$

$$\partial_t(\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l p_l) - p_l \partial_x \alpha_l = 0 \qquad (\mathscr{H})$$

$$\partial_t(\alpha_g \rho_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g) = 0$$

$$\partial_t(\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g p_g) - p_l \partial_x \alpha_g = 0$$

$$\partial_t \alpha_l = \Theta_p (p_l - p_g)$$

$$\partial_t(\alpha_l \rho_l) = 0$$

$$\partial_t(\alpha_l \rho_l u_l) = \Theta_u (u_g - u_l)$$

$$\partial_t(\alpha_g \rho_g) = 0$$

$$\partial_t(\alpha_g \rho_g u_g) = \Theta_u (u_l - u_g)$$

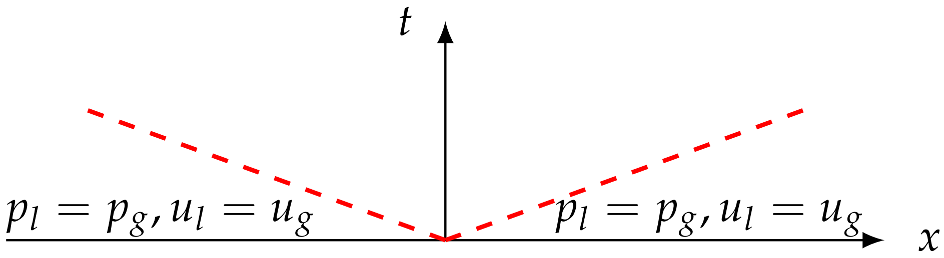
Le problème de Riemann pour $(\mathscr{H})$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{U} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbb{U}) + \mathbf{c}(\mathbb{U})\partial_x \mathbb{U} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ \mathbb{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbb{U}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{U}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Le problème de Riemann pour $(\mathscr{H})$

$$
\begin{cases}
\partial_t \mathbb{U} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbb{U}) + \mathbf{c}(\mathbb{U})\partial_x \mathbb{U} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\[2em]
\mathbb{U}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbb{U}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{U}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}
\end{cases}
$$

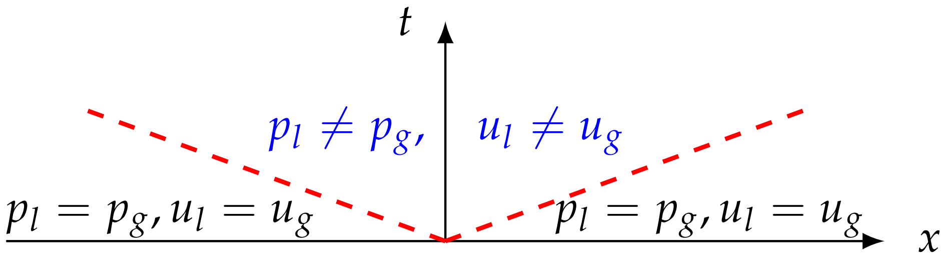
Déséquilibres en pression-vitesse



Le problème de Riemann pour $(\mathscr{H})$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{U} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbb{U}) + \mathbf{c}(\mathbb{U})\partial_x \mathbb{U} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ \mathbb{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbb{U}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{U}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

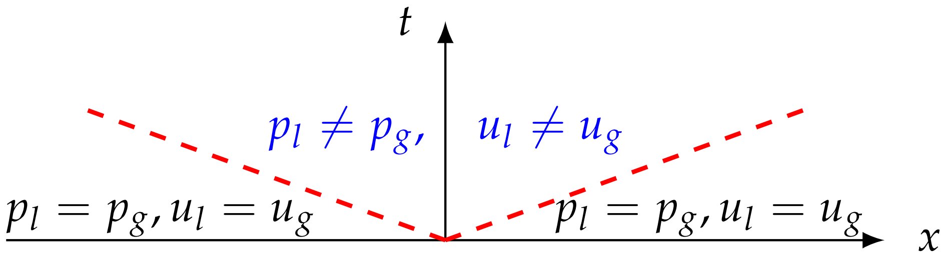
Déséquilibres en pression-vitesse



Le problème de Riemann pour $(\mathscr{H})$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{U} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbb{U}) + \mathbf{c}(\mathbb{U})\partial_x \mathbb{U} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ \mathbb{U}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbb{U}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{U}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Déséquilibres en pression-vitesse

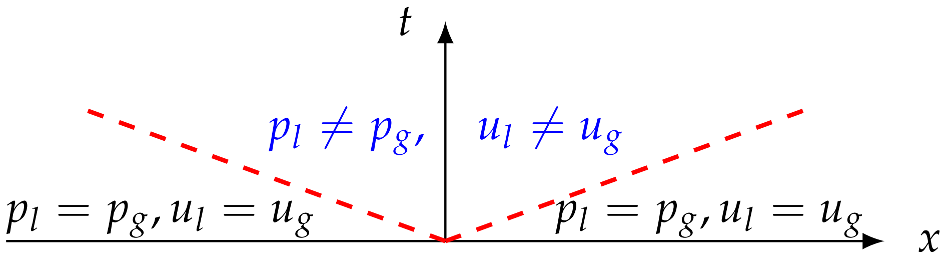


Les difficultés de la résolution (aucune résolution complète)

Le problème de Riemann pour $(\mathscr{H})$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{U} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbb{U}) + \mathbf{c}(\mathbb{U})\partial_x \mathbb{U} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ \mathbb{U}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbb{U}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{U}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Déséquilibres en pression-vitesse



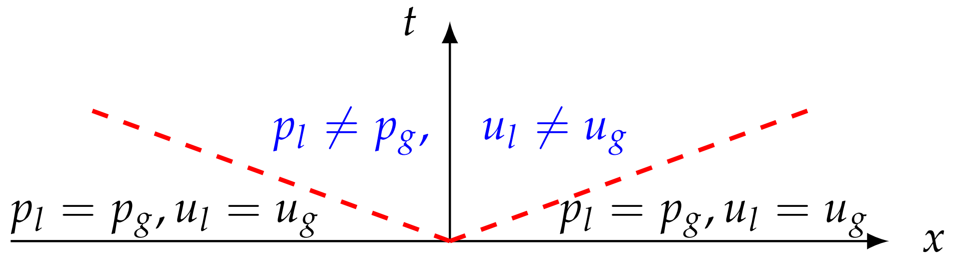
Les difficultés de la résolution (aucune résolution complète)

- ▷ Ordonnancement et croisement des ondes, résonance,

Le problème de Riemann pour $(\mathscr{H})$

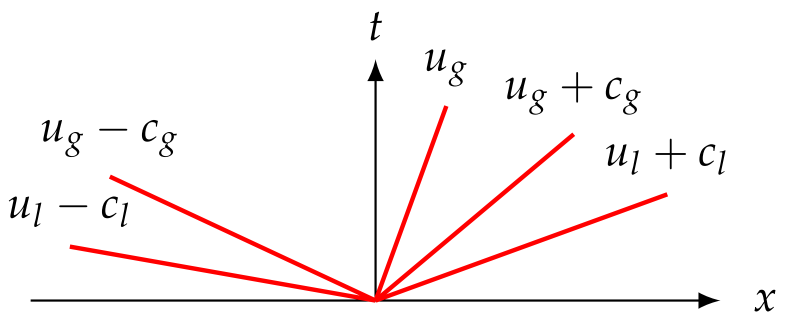
$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{U} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbb{U}) + \mathbf{c}(\mathbb{U})\partial_x \mathbb{U} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ \mathbb{U}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbb{U}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{U}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Déséquilibres en pression-vitesse



Les difficultés de la résolution (aucune résolution complète)

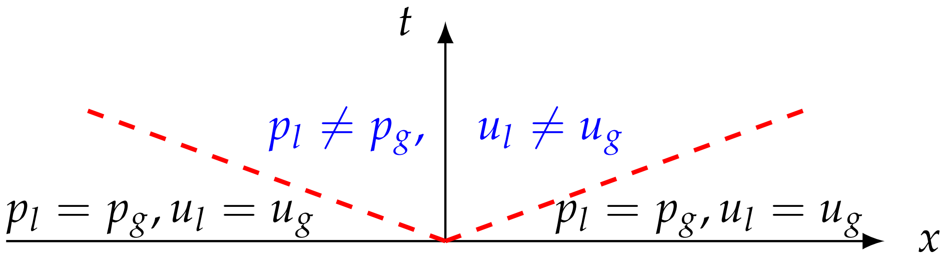
- ▷ Ordonnancement et croisement des ondes, résonance,



Le problème de Riemann pour $(\mathscr{H})$

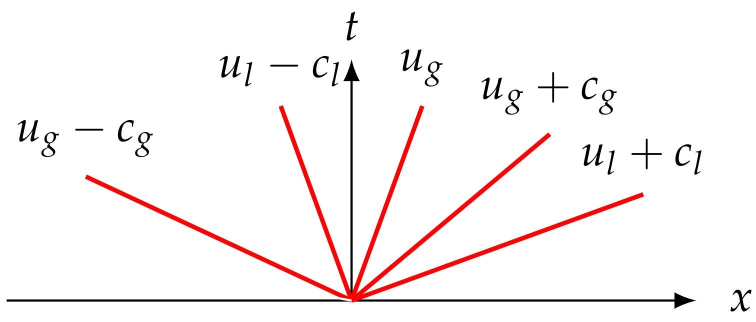
$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{U} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbb{U}) + \mathbf{c}(\mathbb{U})\partial_x \mathbb{U} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ \mathbb{U}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbb{U}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{U}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Déséquilibres en pression-vitesse



Les difficultés de la résolution (aucune résolution complète)

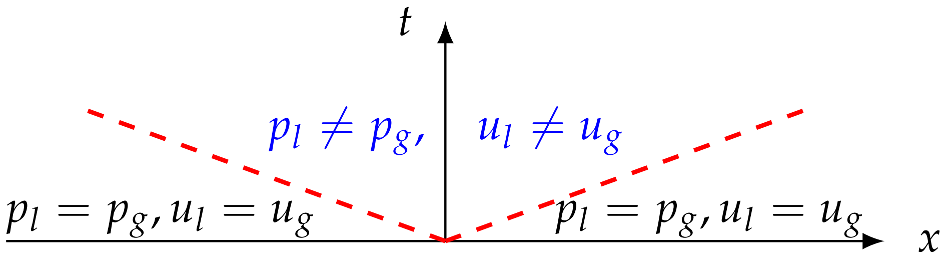
- Ordonnancement et croisement des ondes, résonance,



Le problème de Riemann pour $(\mathscr{H})$

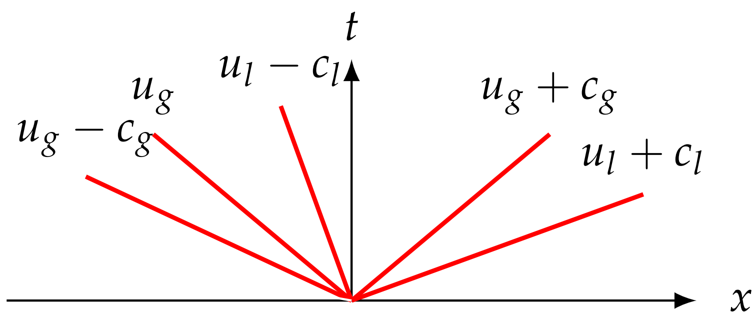
$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{U} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbb{U}) + \mathbf{c}(\mathbb{U})\partial_x \mathbb{U} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ \mathbb{U}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbb{U}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{U}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Déséquilibres en pression-vitesse



Les difficultés de la résolution (aucune résolution complète)

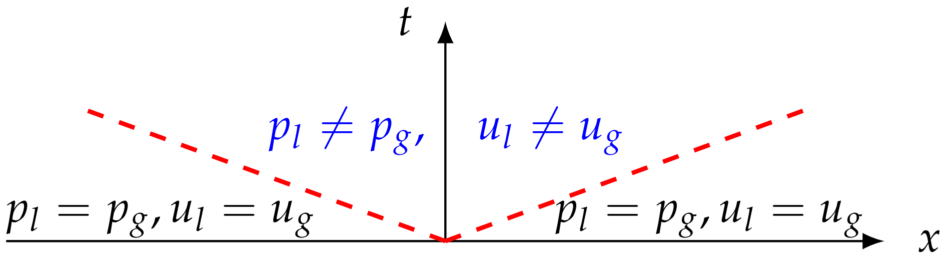
▷ Ordonnancement et croisement des ondes, résonance,



Le problème de Riemann pour $(\mathscr{H})$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\partial_t \mathbb{U} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbb{U}) + \mathbf{c}(\mathbb{U})\partial_x \mathbb{U} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\[2em]
\mathbb{U}(x, t = 0) = \left\{
\begin{array}{lll}
\mathbb{U}_L & \text{si} & x < 0, \\
\mathbb{U}_R & \text{si} & x > 0.
\end{array}
\right.
\end{array}
\right.
$$

Déséquilibres en pression-vitesse



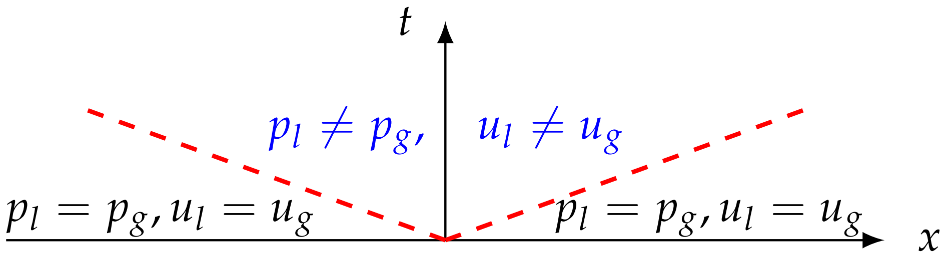
Les difficultés de la résolution (aucune résolution complète)

- ▷ Ordonnancement et croisement des ondes, résonance,
- ▷ Non linéarités dues aux lois de pression,

Le problème de Riemann pour $(\mathscr{H})$

$$\begin{cases} \partial_t \mathbb{U} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbb{U}) + \mathbf{c}(\mathbb{U})\partial_x \mathbb{U} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \\ \mathbb{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbb{U}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{U}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Déséquilibres en pression-vitesse



Les difficultés de la résolution (aucune résolution complète)

- Ordonnancement et croisement des ondes, résonance,
- Non linéarités dues aux lois de pression,
- Traitement des termes non conservatifs $p_l \partial_x \alpha_l$,

Approximation par relaxation

On introduit un système plus grand mais "plus linéaire" qui *relaxe* vers $(\mathscr{H})$ dans la limite $\varepsilon \to 0$: Pour $k \in \{l, g\}$:

Approximation par relaxation

On introduit un système plus grand mais "plus linéaire" qui *relaxe* vers $(\mathscr{H})$ dans la limite $\varepsilon \to 0$: Pour $k \in \{l, g\}$:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0,\\
&\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0,\\
&\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)\partial_x \alpha_k = 0,\\
&\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = \frac{1}{\varepsilon}\alpha_k \rho_k (\tau_k - \mathcal{T}_k),
\end{aligned}
$$

avec $\pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k) = p_k(\mathcal{T}_k) + a_k{}^2(\mathcal{T}_k - \tau_k)$, où $\tau_k = \rho_k^{-1}$.

Approximation par relaxation

On introduit un système plus grand mais "plus linéaire" qui *relaxe* vers $(\mathscr{H})$ dans la limite $\varepsilon \to 0$: Pour $k \in \{l, g\}$:

$$\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)\partial_x \alpha_k = 0,$$

$$\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = \frac{1}{\varepsilon}\alpha_k \rho_k (\tau_k - \mathcal{T}_k),$$

avec $\pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k) = p_k(\mathcal{T}_k) + {a_k}^2(\mathcal{T}_k - \tau_k)$, où $\tau_k = \rho_k^{-1}$.

Approximation par relaxation

On introduit un système plus grand mais "plus linéaire" qui *relaxe* vers $(\mathscr{H})$ dans la limite $\varepsilon \to 0$:   Pour $k \in \{l, g\}$:

$$(\mathscr{R}) \qquad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)\partial_x \alpha_k = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0, \end{aligned}$$

avec $\pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k) = p_k(\mathcal{T}_k) + {a_k}^2(\mathcal{T}_k - \tau_k)$, où $\tau_k = \rho_k^{-1}$.

Approximation par relaxation

On introduit un système plus grand mais "plus linéaire" qui *relaxe* vers $(\mathscr{H})$ dans la limite $\varepsilon \to 0$: Pour $k \in \{l, g\}$:

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\
&\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\
&\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)\partial_x \alpha_k = 0, \\
&\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0,
\end{aligned}$$

avec $\pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k) = p_k(\mathcal{T}_k) + a_k{}^2(\mathcal{T}_k - \tau_k)$, où $\tau_k = \rho_k^{-1}$.

Avantages de $(\mathscr{R})$:

- Le système de relaxation est à champs linéairement dégénérés. Toutes les ondes sont des dicontinuités de contact,
- Il existe une entropie pour le système $(\mathscr{R})$:

$$\partial_t\left(\alpha_l \rho_l \mathcal{E}_l + \alpha_g \rho_g \mathcal{E}_g\right) + \partial_x\left(\alpha_l \rho_l \mathcal{E}_l u_l + \alpha_l \pi_l u_l + \alpha_g \rho_g \mathcal{E}_g u_g + \alpha_g \pi_g u_g\right) = 0,$$

Approximation par relaxation

On introduit un système plus grand mais "plus linéaire" qui *relaxe* vers $(\mathscr{H})$ dans la limite $\varepsilon \to 0$: Pour $k \in \{l, g\}$:

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)\partial_x \alpha_k = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0, \end{aligned}$$

avec $\pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k) = p_k(\mathcal{T}_k) + {a_k}^2(\mathcal{T}_k - \tau_k)$, où $\tau_k = \rho_k^{-1}$.

Difficultés liées à $(\mathscr{R})$:

- Les valeurs propres $u_k - a_k\tau_k$, u_k et $u_k + a_k\tau_k$ ne sont pas naturellement ordonnées.
- Phénomène de résonance possible.
- Les équations des deux phases sont couplées par les termes non conservatifs $\pi_l \partial_x \alpha_k$.

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

On cherche une solution de

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0,\\
&\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0,\\
&\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)\partial_x \alpha_k = 0,\\
&\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0.
\end{aligned}$$

pour la donnée initiale $\mathbb{W}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbb{W}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{W}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

On cherche une solution de

$$(\mathscr{R}) \qquad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)\partial_x \alpha_k = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0. \end{aligned}$$

pour la donnée initiale $\mathbb{W}(x, t=0) = \begin{cases} \mathbb{W}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{W}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

On cherche les solutions subsoniques en vitesse relative: $|u_l - u_g| < \min(a_g \tau_g, a_l \tau_l)$.

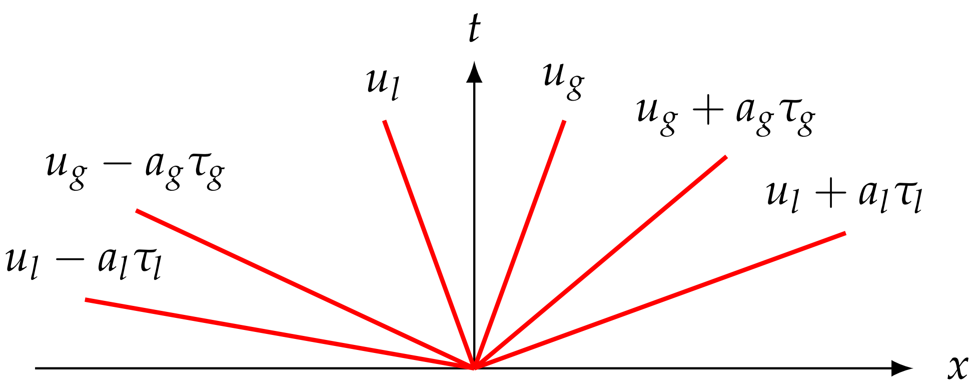
Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

On cherche une solution de

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)\partial_x \alpha_k = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0. \end{aligned}$$

pour la donnée initiale $\mathbb{W}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbb{W}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{W}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

On cherche les solutions subsoniques en vitesse relative: $|u_l - u_g| < \min(a_g \tau_g, a_l \tau_l)$.



Profil d'onde $u_l < u_g$

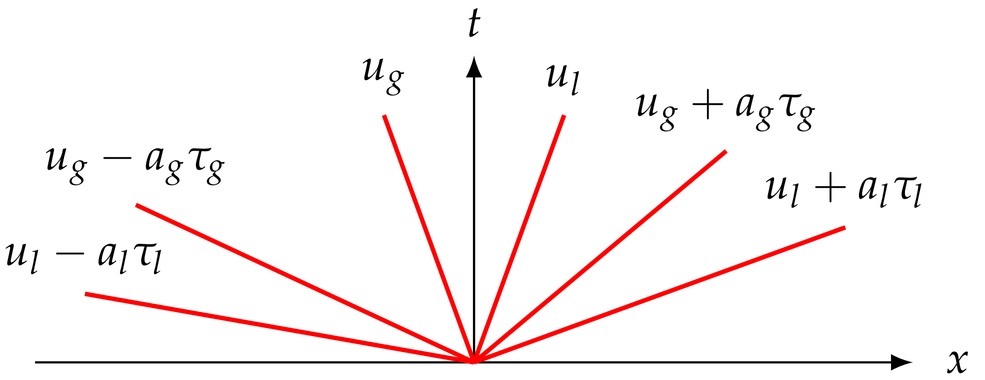
Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

On cherche une solution de

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)\partial_x \alpha_k = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0. \end{aligned}$$

pour la donnée initiale $\mathbb{W}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbb{W}_L & \text{si} \quad x < 0, \\ \mathbb{W}_R & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

On cherche les solutions subsoniques en vitesse relative: $|u_l - u_g| < \min(a_g \tau_g, a_l \tau_l)$.



Profil d'onde $u_g < u_l$

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Théorème. *Si les données initiales* $(\mathbb{W}_L, \mathbb{W}_R) \in \Omega^r \times \Omega^r$ *sont telles que*

$$\max\left(0, \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_g}{a_l}\frac{\tau_{g,R}^\sharp}{\tau_{l,L}^\sharp}\right) < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < \min\left(1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|, \mathcal{M}_L^\sharp + \frac{a_g}{a_l}\frac{\tau_{g,L}^\sharp}{\tau_{l,L}^\sharp}\right)$$

avec

Des nombres réduits qui ne dépendent pas de α:

- $\mathcal{M}_L^\sharp$ *un nombre de Mach relatif qui mesure l'écart* $u_l - u_g$ *dans la donnée initiale,*
- $\mathcal{P}_L^\sharp$ *un nombre réduit qui mesure l'écart* $\pi_l - \pi_g$ *dans la donnée initiale,*
- *Les quantités* $\tau^\sharp$ *sont homogènes à des volumes spécifiques,*

Une quantité qui dépend de α:

$$\Lambda(\alpha) = \frac{\alpha_{g,R} - \alpha_{g,L}}{\alpha_{g,R} + \alpha_{g,L}} \quad \in \quad (-1, 1),$$

alors le système $(\mathscr{R})$ *admet une solution au problème de Riemann de profil d'onde subsonique* $u_g < u_l$.

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Idée de la preuve:

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l \partial_x \alpha_k = 0, \\ &\partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0. \end{aligned}$$

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Idée de la preuve:

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t (\alpha_k \rho_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t (\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x (\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k (\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l \partial_x \alpha_k = 0, \\ &\partial_t (\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t (\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0. \end{aligned}$$

Soit u_g^* la vitesse effective de l'onde u_g dans le solution du problème de Riemann.

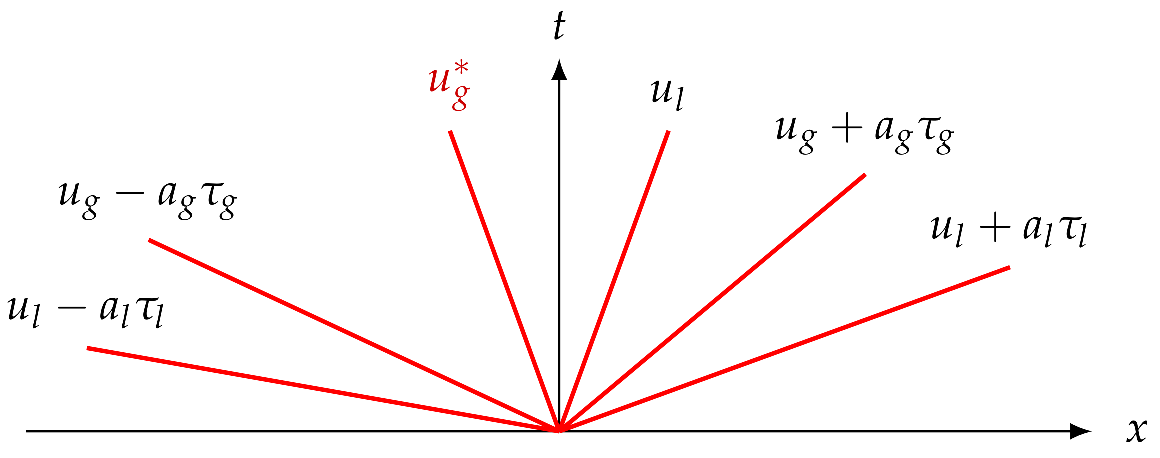
Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Idée de la preuve:

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g^* \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l \partial_x \alpha_k = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0. \end{aligned}$$

Soit u_g^* la vitesse effective de l'onde u_g dans le solution du problème de Riemann.

- ▷ On remarque que $\partial_x \alpha_k = 0$ sauf si $x - u_g^* t = 0$ où il vaut $(\alpha_{k,R} - \alpha_{k,L})\delta_{x-u_g^* t}$.



Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Idée de la preuve:

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g^* \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l \partial_x \alpha_k = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0. \end{aligned}$$

Soit u_g^* la vitesse effective de l'onde u_g dans le solution du problème de Riemann.

- ▷ On remarque que $\partial_x \alpha_k = 0$ sauf si $x - u_g^* t = 0$ où il vaut $(\alpha_{k,R} - \alpha_{k,L})\delta_{x-u_g^* t}$.
- ▷ Si on suppose que l'on connaît une prédiction de π_l : π_l^*

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Idée de la preuve:

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g^* \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) - \pi_l \partial_x \alpha_k = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0. \end{aligned}$$

Soit u_g^* la vitesse effective de l'onde u_g dans le solution du problème de Riemann.

- ▷ On remarque que $\partial_x \alpha_k = 0$ sauf si $x - u_g^* t = 0$ où il vaut $(\alpha_{k,R} - \alpha_{k,L})\delta_{x-u_g^* t}$.
- ▷ Si on suppose que l'on connaît une prédiction de π_l : π_l^*

$$(\mathscr{R}) \quad \begin{aligned} &\partial_t \alpha_l + u_g^* \cdot \partial_x \alpha_l = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k) = 0, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k u_k) + \partial_x(\alpha_k \rho_k u_k^2 + \alpha_k \pi_k(\tau_k, \mathcal{T}_k)) = \pi_l^* [\alpha_k] \delta_{x-u_g^* t}, \\ &\partial_t(\alpha_k \rho_k \mathcal{T}_k) + \partial_t(\alpha_k \rho_k u_k \mathcal{T}_k) = 0. \end{aligned}$$

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Idée de la preuve:

Les deux phases sont découplées

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Idée de la preuve:
Les deux phases sont découplées
Phase gaz

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_g + u_g^* \partial_x \alpha_g = 0,\\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g) = 0,\\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g \pi_g(\tau_g \mathcal{T}_g)) = \pi_l^* [\alpha_l] \delta_{x - u_g^* t},\\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g \mathcal{T}_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g \mathcal{T}_g) = 0
\end{aligned}
$$

On connaît π_l^*, on calcule u_g^* : $\quad u_g^* = \Phi(\pi_l^*)$.

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Idée de la preuve:

Les deux phases sont découplées

Phase gaz

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_g + u_g^* \partial_x \alpha_g = 0, \\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g) = 0, \\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g \pi_g(\tau_g \mathcal{T}_g)) = \pi_l^* [\alpha_l] \delta_{x-u_g^* t}, \\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g \mathcal{T}_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g \mathcal{T}_g) = 0
\end{aligned}
$$

On connaît π_l^*, on calcule u_g^* : $\quad u_g^* = \Phi(\pi_l^*)$.

Phase liquide

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g^* \partial_x \alpha_l = 0, \\
&\partial_t(\alpha_l \rho_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l) = 0, \\
&\partial_t(\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)) = \pi_l^* [\alpha_l] \delta_{x-u_g^* t}, \\
&\partial_t(\alpha_l \rho_l \mathcal{T}_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l \mathcal{T}_l) = 0
\end{aligned}
$$

On connaît u_g^*, on calcule π_l^*: $\quad \pi_l^* = \Psi(u_g^*)$.

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Idée de la preuve:
Les deux phases sont découplées
Phase gaz

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_g + u_g^* \partial_x \alpha_g = 0,\\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g) = 0,\\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g^2 + \alpha_g \pi_g(\tau_g \mathcal{T}_g)) = \pi_l^* [\alpha_l] \delta_{x - u_g^* t},\\
&\partial_t(\alpha_g \rho_g \mathcal{T}_g) + \partial_x(\alpha_g \rho_g u_g \mathcal{T}_g) = 0
\end{aligned}
$$

On connaît π_l^*, on calcule u_g^* : $\quad u_g^* = \Phi(\pi_l^*)$.

Phase liquide

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \alpha_l + u_g^* \partial_x \alpha_l = 0,\\
&\partial_t(\alpha_l \rho_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l) = 0,\\
&\partial_t(\alpha_l \rho_l u_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l^2 + \alpha_l \pi_l(\tau_l, \mathcal{T}_l)) = \pi_l^* [\alpha_l] \delta_{x - u_g^* t},\\
&\partial_t(\alpha_l \rho_l \mathcal{T}_l) + \partial_x(\alpha_l \rho_l u_l \mathcal{T}_l) = 0
\end{aligned}
$$

On connaît u_g^*, on calcule π_l^*: $\quad \pi_l^* = \Psi(u_g^*)$.

Point fixe: $\quad u_g^* = \Phi \circ \Psi(u_g^*)$

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$\max\left(0, \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_g}{a_l}\frac{\tau_{g,R}^\sharp}{\tau_{l,L}^\sharp}\right) < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < \min\left(1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|, \mathcal{M}_L^\sharp + \frac{a_g}{a_l}\frac{\tau_{g,L}^\sharp}{\tau_{l,L}^\sharp}\right)$$

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$\mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_g}{a_l}\frac{\tau_{g,R}^\sharp}{\tau_{l,L}^\sharp} < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < \mathcal{M}_L^\sharp + \frac{a_g}{a_l}\frac{\tau_{g,L}^\sharp}{\tau_{l,L}^\sharp}$$

Condition suffisante pour assurer la positivité des densités de la phase gaz.

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

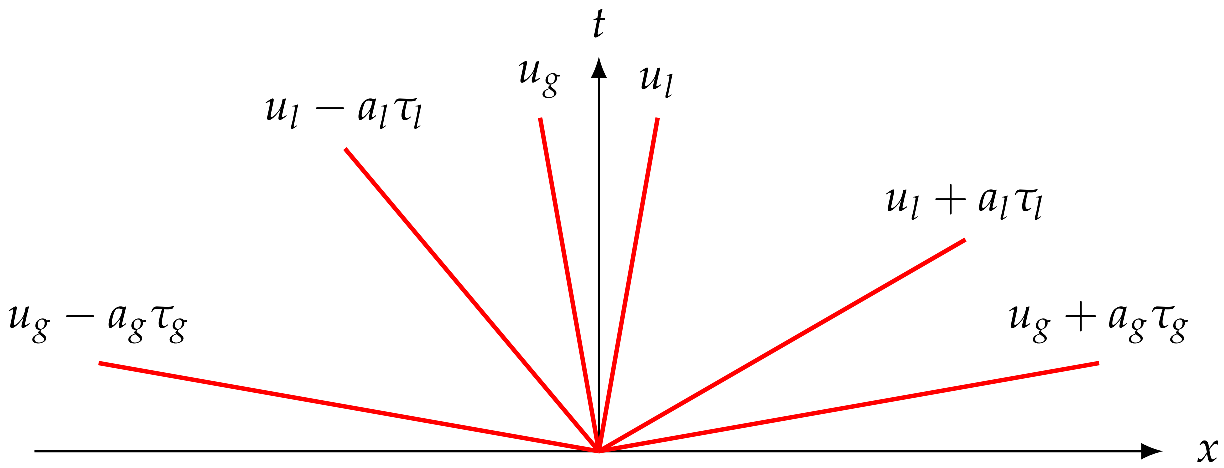
Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

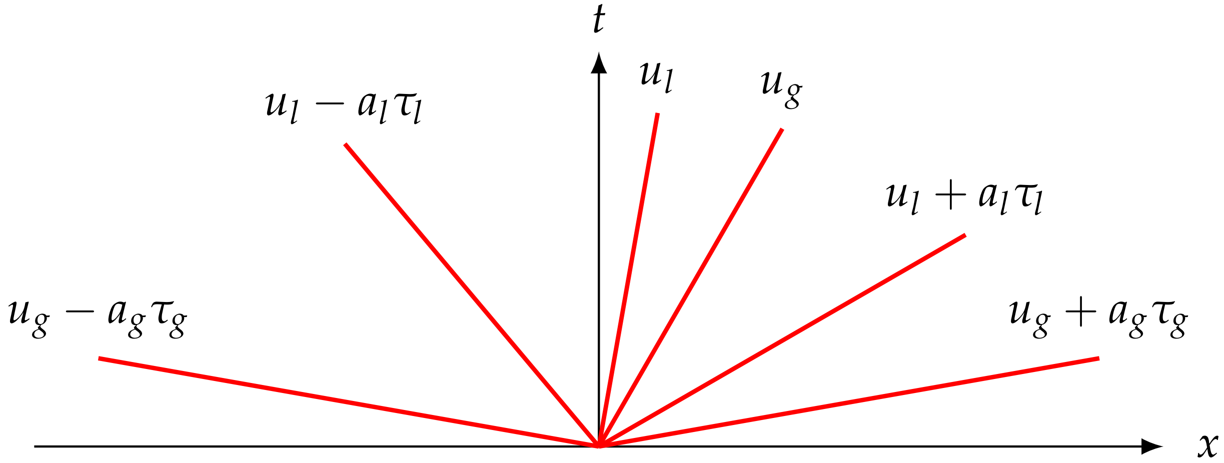


Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

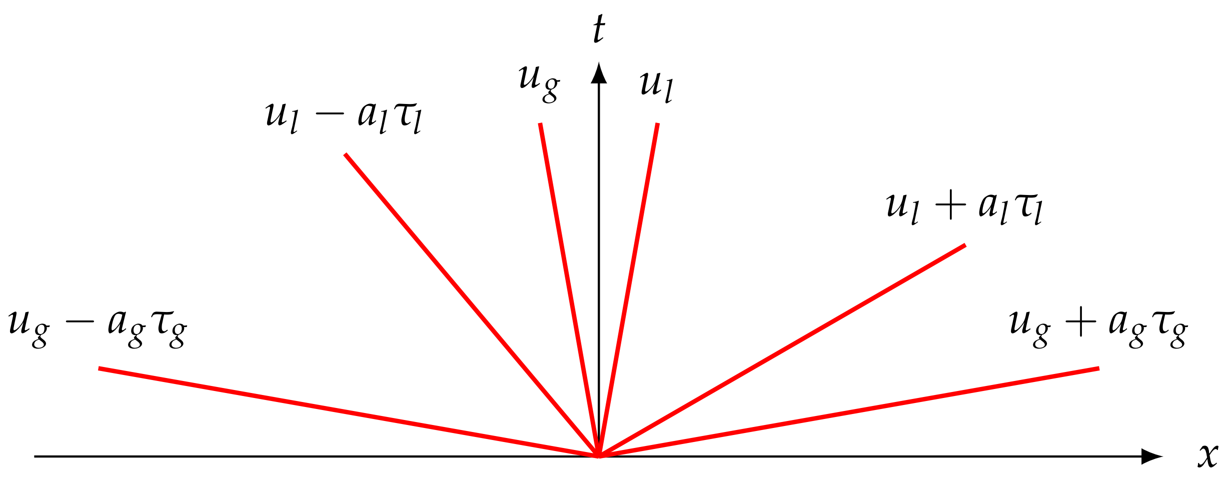


Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.



Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

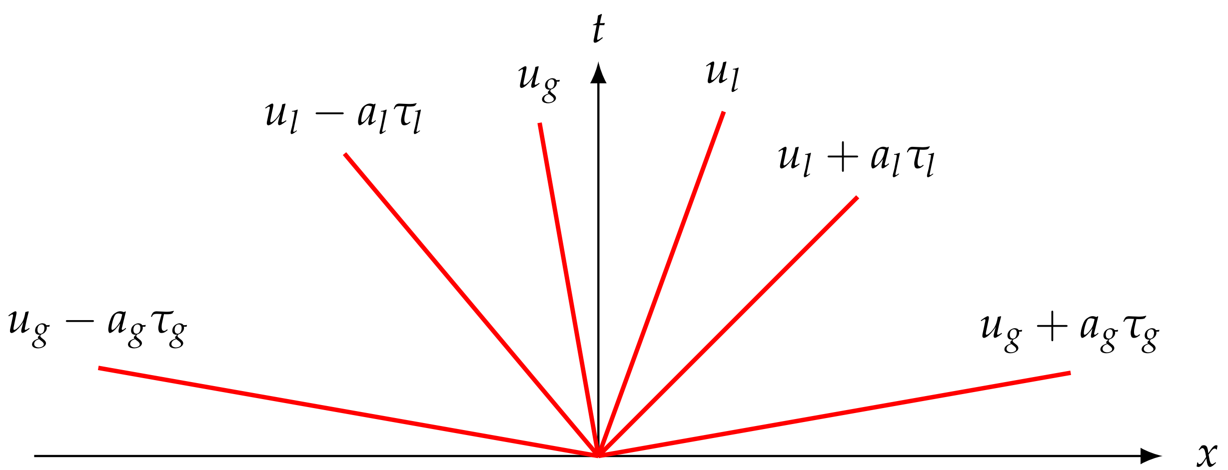
Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

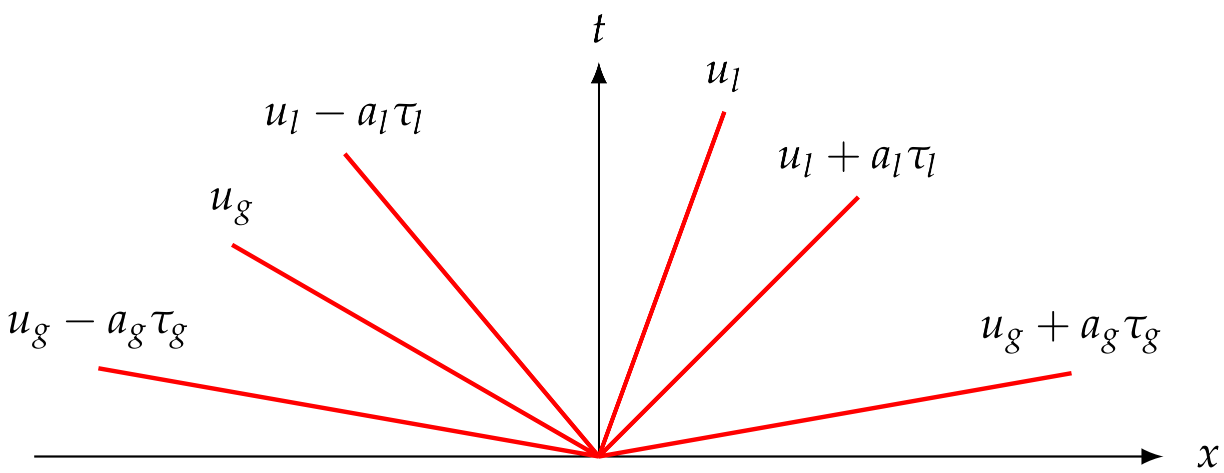


Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

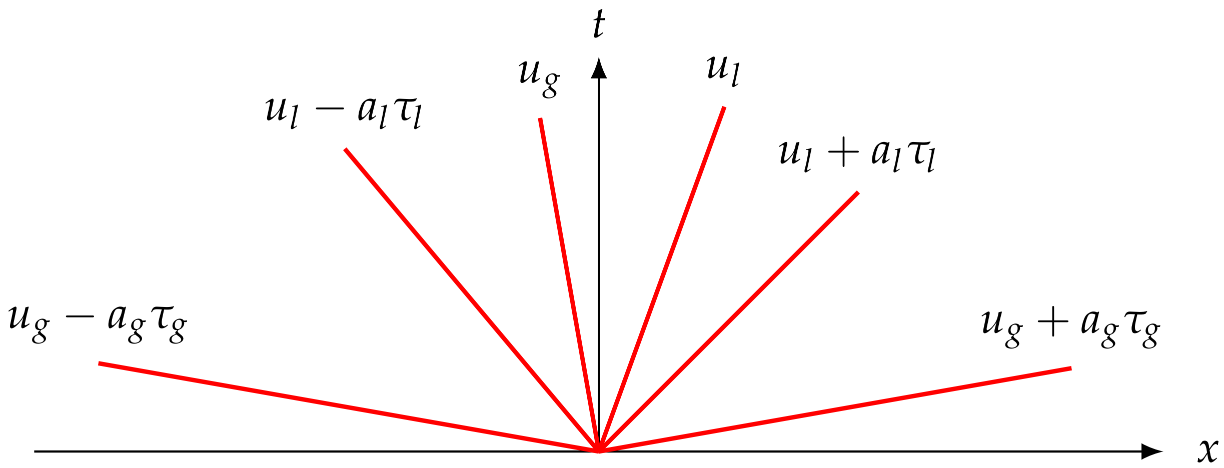


Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.



Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

On considère des données initiales proche équilibre:

$$|u_l - u_g| = \varepsilon\, u(x), \qquad |\pi_l - \pi_g| = \varepsilon\, \pi(x).$$

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

On considère des données initiales proche équilibre:

$$|u_l - u_g| = \varepsilon\, u(x), \qquad |\pi_l - \pi_g| = \varepsilon\, \pi(x).$$

Alors

$$|\mathcal{M}_L^\sharp| = \left|\frac{a_l}{a_g} - 1\right| \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\varepsilon), \qquad |\mathcal{P}_L^\sharp| = \left|\frac{a_g}{a_l} - 1\right| \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

On considère des données initiales proche équilibre:

$$|u_l - u_g| = \varepsilon\, u(x), \qquad |\pi_l - \pi_g| = \varepsilon\, \pi(x).$$

Alors

$$|\mathcal{M}_L^\sharp| = \left|\frac{a_l}{a_g} - 1\right| \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\varepsilon), \qquad |\mathcal{P}_L^\sharp| = \left|\frac{a_g}{a_l} - 1\right| \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

- Supposons $a_l/a_g \approx 1$. Si $\alpha_{g,L} \to 0$ alors $\Lambda(\alpha) \to 1$. Résonance quand la phase gaz disparaît,
- Si $a_l/a_g >> 1$. Résonance possible à cause du terme $\mathcal{M}_L^\sharp$,
- Si $a_l/a_g << 1$. Résonance possible à cause du terme $\mathcal{P}_L^\sharp$.

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

On considère des données initiales proche équilibre:

$$|u_l - u_g| = \varepsilon\, u(x), \qquad |\pi_l - \pi_g| = \varepsilon\, \pi(x).$$

Conclusion:

En partant de données initiales subsoniques proche équilibre en vitesses et pressions, on peut avoir une solution supersonique en vitesse relative!

Problème de Riemann pour $(\mathscr{R})$

Analyse des inégalités obtenues:

$$0 < \mathcal{M}_L^\sharp - \frac{a_l}{a_g}\Lambda(\alpha)\mathcal{P}_L^\sharp < 1 - \frac{a_l}{a_g}|\Lambda(\alpha)|$$

Condition suffisante pour assurer l'ordonnancement subsonique des ondes.

On considère des données initiales proche équilibre:

$$|u_l - u_g| = \varepsilon\, u(x), \qquad |\pi_l - \pi_g| = \varepsilon\, \pi(x).$$

Conclusion:

En partant de données initiales subsoniques proche équilibre en vitesses et pressions, on peut avoir une solution supersonique en vitesse relative!

La prise en compte des termes source de relaxation en pression et vitesse semble indispensable.

Conclusion et perspectives

Conclusion:

- Un système de relaxation pour le modèle de Baer-Nunziato,
- Solution du problème de Riemann relaxé pour les régimes d'écoulement subsonique: conditions *ab initio* pour l'ordonnancement des ondes,
- Importance des termes de retour à l'équilibre en vitesses et pressions.

Perspectives:

- Prise en compte de la convection et des termes de retour à l'équilibre dans le même pas.

Bibliographie

Sur Baer-Nunziato:

[1 A. Ambroso & C. Chalons & F. Coquel & T. Galié. Relaxation and numerical approximation of a two-fluid two-pressure diphasic model. *M2AN Math. Model. Numer. Anal. 43 no. 6 pages 1063-1097,* 2009.

[2 M.R. Baer & J.W. Nunziato. A two phase mixture theory for the deflagration to detonation transition (ddt) in reactive granular materials. *Int. J. Multiphase Flows, Vol 12(6), pages 861-889,* 1986.

[3 F. Coquel & K. Saleh & N. Seguin. Une méthode de relaxation pour le modèle de Baer-Nunziato en configuration isentropique. *Rapport EDF H-I81-2010-00435-FR,* 2010.

Sur Euler en tuyère:

[4 F. Coquel & K. Saleh & N. Seguin. Relaxation and numerical approximation for fluid flows in a nozzle. *Preprint en préparation.*

[5 P.G. LeFloch & M.D. Thanh. The Riemann problem for fluid flows in a nozzle with discontinuous cross-section. *Comm. Math. Sci. Vol1, pages 763-796*, 2003.

Merci de votre attention.