

AMéthode de parallélisation en temps: Application aux méthodes de décomposition de domaine

Rim Guetat
sous la direction de M. Yvon Maday

Laboratoire Jacques Liou Lions
Université Pierre et Marie Curie

24 Mai 2011

- Les méthodes de décomposition de domaine sont des techniques efficaces pour **la parallélisation à travers l'espace** du calcul de la résolution d'EDP.
 - **La direction temporelle** n'a pas bénéficié du même effort en vue de sa parallélisation. La résolution en temps semble naturellement **séquentielle**.

- De nouvelles techniques de parallélisation doivent être définies pour tenir compte de la nouvelle génération de calculateurs parallèles.
 - Exemple: Machine au top 10 (200 000 processeurs)
 - But: **Parallélisation à travers le temps** : Méthode **Pararéal** introduite par **Lions J.-L, Maday Y., Trunici G. (2001)**.

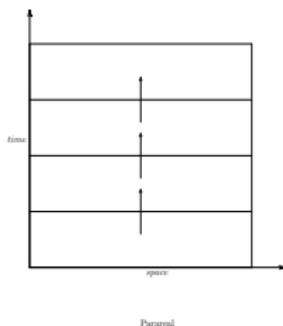


Figure: Parallélisation à travers le temps.

- Considérons le problème à valeur initiale suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = 0 \text{ sur } [T_0, T] \\ u(T_0) = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

où \mathcal{L} est un opérateur différentiel linéaire ou non linéaire.

- La partition de l'intervalle de temps est définie par:

$$T_0 = 0 < \dots < T_n = n\Delta T < \dots < T_N = T. \quad (2)$$

- On introduit une suite finie de fonctions $(\lambda_n)_{n=0,\dots,N-1}$ avec $\lambda_0 = u_0$. Si $(\lambda_n)_{n=0,\dots,N-1}$ était connue, les N problèmes de Cauchy définis sur les intervalles $[T_n, T_{n+1}]$ peuvent être résolus en parallèle

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} + \mathcal{L}u_n = 0 \text{ sur } [T_n, T_{n+1}] \\ u_n(t = T_n) = \lambda_n, \end{cases} \quad (3)$$

- La collection des solutions u_n coïncide avec $(u|_{[T_n, T_{n+1}]})_{n=0,\dots,N-1}$ lorsque les conditions aux interfaces temporelles vérifient:

$$u_n(T_{n+1}, \lambda_n) = \lambda_{n+1} \text{ pour } n = 0, \dots, N - 1.$$

- La méthode Pararéelle est une méthode itérative pour construire une suite $(\lambda_n^k)_{n=1,\dots,N}$ qui converge vers une solution $(\lambda_n)_{n=1,\dots,N}$.
- L'opérateur $\mathcal{G}_{\Delta T}$ est un propagateur grossier **moins précis** mais moins coûteux, qui permet de propager rapidement l'information sur tout l'intervalle $[0, T]$ avec **un pas de temps grossier ΔT** .
- L'opérateur $\mathcal{F}_{\Delta T}$ est propagateur fin, qui procure une approximation **précise** de la solution exacte, avec $\mathcal{F}_{\Delta T}(\lambda_n) = \lambda_{n+1}$. Il réalise des résolutions précises avec un schéma en temps utilisant **un pas δt petit par rapport à ΔT** et est utilisé exclusivement en parallèle, sur les sous-intervalles $\{[T_n, T_{n+1}]\}_{n=0,\dots,N-1}$.
- La suite $(\lambda_n^k)_k$ est générée par

$$\lambda_{n+1}^{k+1} = \mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_n^{k+1}) + \mathcal{F}_{\Delta T}(\lambda_n^k) - \mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_n^k).$$

Algorithme de Pararéel

$$\lambda_{n+1}^{k+1} = \underbrace{\mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_n^{k+1})}_{\text{Prédiction}} + \underbrace{\mathcal{F}_{\Delta T}(\lambda_n^k) - \mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_n^k)}_{\text{Correction}}$$

- 0. Initialisation: Schéma **grossier** $\lambda_n^0 = \mathcal{G}_{n\Delta T}(u_0)$ (séquentiel).
- 1. Schéma **fin** $\mathcal{F}_{\Delta T}(\lambda_n^k)$ sur chaque intervalle $]T_n, T_{n+1}[$ (parallèle).
- 2. Schéma **grossier** de prédiction $\mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_n^{k+1})$ (séquentiel). Cette phase de prédiction est complétée par une phase de correction $\mathcal{F}_{\Delta T}(\lambda_n^k) - \mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_n^k)$.
- 3- Vérification d'un test d'arrêt $|\lambda_n^{k+1} - \lambda_n^k| < \epsilon, \forall n$.
- Pour $k \rightarrow N$, on a $\lambda_n^{k+1} = \lambda_n^k$ cela revient à résoudre séquentiellement le problème d'évolution en appliquant $\mathcal{F}_{\Delta T}$.

- Théorème (Convergence) (Maday Y., Bal G.)

Soient $u(t, x)$ la solution de l'équation parabolique et λ_n^k solution obtenue par le schéma pararéel avec discrétisation en temps Euler implicite pour le propagateur grossier, alors on a l'estimation suivante :

$$\| u(T, x) - \lambda_n^k \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C(\Delta T^k + \delta t) \| u_0 \|_{L^2(\mathbb{R})},$$

- Si le propagateur grossier est basé sur un schéma en temps **dissipatif** l'algorithme pararéel est **stable**.
- Dans le cas où le propagateur grossier est **non dissipatif (Cas d'équation hyperbolique) instabilité**
 - Dans le cas linéaire : La solution initiale est régulière.
 - Traitement spécifique dans le cas non linéaire (Dai X., Maday Y.).

- L'algorithme de Pararéal Standard

$$\lambda_n^{k+1} = \mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_{n-1}^{k+1}) + \mathcal{F}_{\Delta T}(\lambda_{n-1}^k) - \mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_{n-1}^k).$$

- L'algorithme de Pararéal couplé avec d'autres approches itératives

$$\lambda_n^{k+1} = \mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_{n-1}^{k+1}) + \tilde{\mathcal{F}}_{\Delta T}(\lambda_{n-1}^k) - \mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_{n-1}^k)$$

- Contrôle optimal (Maday Y., Riahi M.K)
- Deferred correction (Minnion)
- Décomposition de domaine.

- **Objectif:** Coupler de manière efficace le pararéal avec les algorithmes de décomposition de domaine au fait qu'on se limite à chaque itération k du pararéal à un nombre réduit P d'itérations par sous-domaine spatial et d'obtenir après convergence une solution aussi précise que la solution fine pure séquentielle monodomaine.
- **Point clé:** Choix des conditions d'interface efficaces qui mènent à une convergence rapide de l'approche couplée.

- Les méthodes de WR consistent à résoudre dans chaque sous-domaine le problème d'évolution sur tout l'intervalle de temps et à échanger les informations qui sont alors fonctions de la variable d'interface et du temps. L'échange des informations ne se fait donc qu'à la fin de l'intervalle de temps (Gander M.J., Halpern L., Nataf F.).

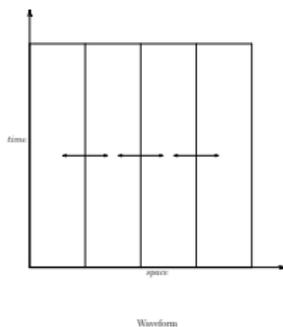


Figure: Waveform relaxation.

- On considère une équation d'évolution aux dérivées partielles (EDP)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = f \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ u(\mathbf{x}, t = 0) = u_0 \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

- On considère ici un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ recouvert par deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 ayant une partie commune $\Omega_1 \cap \Omega_2$ de taille δ . On note $\Gamma_1 = \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega$ et $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \setminus \partial\Omega$.
- L'algorithme de Schwarz de type relaxation d'ondes sur l'intervalle entier $]0, T[$ est le suivant :

Pour $p = 0, \dots$, convergence:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i^{p+1}}{\partial t} + \mathcal{L}u_i^{p+1} = f_i \text{ dans } \Omega_i \times]0, T[\\ u_i^{p+1}(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) \text{ dans } \Omega_i \\ u_i^{p+1} = u_j^p \text{ sur } \Gamma_i \times]0, T[, i \neq j, j \in 1, 2. \end{cases}$$

- On considère l'équation de convection-diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \alpha \cdot \nabla u + bu = f \text{ dans } \Omega \times]0, T[$$

- Théorème (Super-linéaire convergence) (Daoud D., Gander M.J. (2003))

Pour un intervalle de temps borné $[0, T < +\infty[$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, l'itéré u^p de l'algorithme de Schwarz WR satisfait :

$$\| u^p - u \| \leq (C(\nu, \alpha, \delta))^p \operatorname{erfc} \left(\frac{p\delta}{2\sqrt{d\nu T}} \right) \| u^0 - u \| .$$

- La vitesse de convergence de la relaxation d'ondes dépend de la taille T des fenêtres en temps et de la taille du recouvrement δ .

- L'algorithme de parallèle couplé avec Schwarz relaxation d'ondes s'écrit comme le processus itératif suivant :

Initialisation : $\lambda_n^0 = \mathcal{G}_{n\Delta T}(u_0)$,

Itération $k + 1$:

$$\lambda_n^{k+1} = \mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_{n-1}^{k+1}) + \tilde{\mathcal{F}}_{\Delta T}(\lambda_{n-1}^k) - \mathcal{G}_{\Delta T}(\lambda_{n-1}^k),$$

où $\tilde{\mathcal{F}}_{\Delta T}$ est le propagateur fin approché par l'algorithme de Schwarz de type relaxation d'ondes (SWR) sur les sous intervalles $]T_{n-1}, T_n[$ avec peu d'itération .

On considère l'équation d'advection-réaction diffusion en dimension deux sur le carré unité,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u + \mathbf{a} \cdot \nabla u + cu, & \text{dans } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), t \in]0, T], \\ u(\mathbf{x}, t = 0) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) & \text{dans } \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T], \end{cases}$$

avec les données physiques $\nu = 0.5$, la vitesse d'advection vaut $\mathbf{a} = (-1, -1)$ et $c = -1$.

- **Données spatiales:** Approximation par éléments finis du type P^1 -Lagrange $h = \frac{1}{50}$. Le domaine unité est divisé en **quatre sous-domaines avec recouvrement** où la taille du recouvrement $\delta \in \{0.04, 0.08\}$ est égale dans les deux directions en espace.
- **Données Temporelles:** Schéma d'Euler implicite. L'intervalle $[0, T]$, $T = 1$, est divisé en $N = 10$, pas de temps grossier $\Delta T = \frac{1}{10}$, pas de temps fin $\delta t = \frac{\Delta T}{50} = \frac{1}{500}$.

- Dans le cas où $\delta = 0.04$ l'erreur en norme $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$ entre la solution exacte (calculée avec un pas de temps très fin $\delta t/2$) et la solution fine séquentielle vaut 0.00167965.

Table: 4 itérations de SWR, la taille du recouvrement $\delta = 0.04$

$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
0.52239	0.317557	0.168697	0.0804554
$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$
0.0348673	0.0139115	0.00525022	0.00200868

Théorème (Maday Y., Guetat R.) Sous les hypothèses de stabilité du pararéel, le schéma pararéel couplé avec l'algorithme de Schwarz de type relaxation d'ondes pour les équations paraboliques est d'ordre k en temps telle que pour $|\xi| \leq \xi_{\max}$ on a

$$\| \lambda_n^k(x) - \lambda_n(x) \|_{H^1(\Omega)} \leq C_k(\Delta T, \rho(P), \delta t),$$

si $\rho(P) \approx \Delta T^3$ alors

$$C_k(\Delta T, \rho(P), \delta t) < C \Delta T^k + \delta t$$

- Pour l'approche couplée on constate un gain en nombre d'itérations internes par sous-domaine spatial: On ne cherche pas à atteindre la convergence de la méthode de décomposition de domaine.
- Sur le plan théorique: Convergence de la méthode couplée pour une EDP considérée. La vitesse de la convergence dépend de la taille du fenêtre en temps $\Delta T = T_n - T_{n-1}$.

- Étude comparative au niveau des performances numériques sur des géométries complexes en 3D (en collaboration avec Magoulès F.)
- Étude théorique de la convergence de la méthode récursive couplée pararéel avec les méthodes de décomposition de domaine de type (Complément de Schur, Algorithme de Schwarz additive).
- Couplage du pararéel avec les méthodes de relaxation d'ondes dans le cas sans recouvrement.