Sur un modèle de coalescence pour la croissance des bulles dans un magma visqueux

Louis Forestier-Coste[1]
S.Mancini[1]

[1]MAPMO, Université d'Orléans

SMAI, 2011

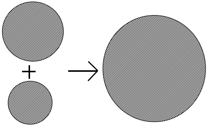
Motivation

- Transport-coalescence : $\partial_t f + \partial_x (a(x,t) f) = Q(f)$
- Coalescence : $\partial_t f = Q(f)$
  Q : opérateur de coalescence.
  - 1D
  - 2D
  - Volcanologie

* en collaboration avec A.Burgisser, ISTO-OSUC

Modèle (1D) : Équation de coalescence



- Coalescence
- variables : x
- inconnue : $f(x,t)$

Équation de coalescence :

$$\partial_t f(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^x H(x-x',x',t)f(x',t)f(x-x',t)\mathrm{d}x' -$$

$$-\int_0^\infty H(x,x',t)f(x',t)f(x,t)\mathrm{d}x'$$

- $H(x,x') = H(x',x)$ symétrique
- $H(x,x') > 0$ positif

Modèle 1D : Rappels

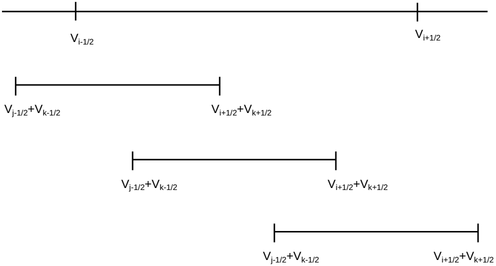
- Quantité conservée : $\mathcal{M}_1(t) = \int_0^\infty x f(x,t)\mathrm{d}x$
  Dans certains cas, cette quantité n'est conservée que pour un temps fini (gélation). Par exemple pour $H(x,x') = xx'$.
- $\mathcal{M}_0(t) \searrow$, $\mathcal{M}_i(t) \nearrow \quad \forall i > 1$
- formulation conservative [1]

$$x\partial_t f = -\partial_x J(x,t)$$

$$\text{avec } J(x,t) = \int_0^x \int_{x-u}^\infty u H(u,v,t) f(u,t) f(v,t)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

[1] F.Filbet, P.Laurençot, SIAM J. SCI. COMPUT. (2004)

- On suppose f constante par morceaux sur chaque maille.
- On prend en compte le chevauchement de plusieurs mailles ($f(x - x', t)$).



[2] S.Qamar, G. Warnecke, Chem. Eng. Sci. (2007)

[3] R. Kumar, J.Kumar, G. Warnecke, Comput. and Chem. Eng. (2010)

Schéma numérique 1D conservatif

- On construit un schéma conservatif. On modifie le noyau au niveau des naissances pour garder la loi de conservation en discret :

$$\tilde{H}_{i,j} = H_{i,j}\frac{(x_i + x_j)(\Delta x_i + \Delta x_j)}{\sum_{\text{"}k=i+j\text{"}} x_k \Delta^k_{i,j}}$$

avec

$$\Delta^k_{i,j} = \Delta\left([x_{k-1/2}, x_{k+1/2}]\bigcap[x_{i-1/2} + x_{j-1/2}, x_{i+1/2} + x_{j+1/2}]\right)$$

Validation 1D

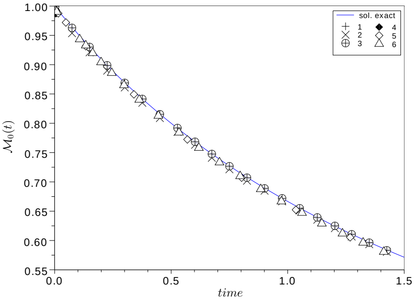
Reprise des tests de [1].

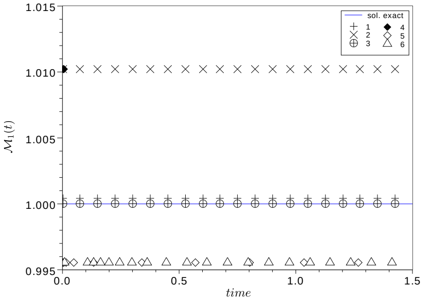
- Test sur l'erreur de troncature ($\int_0^\infty \to \int_0^R$)
- Test sur la gélation
- Erreur due au maillage (test de maillage non-uniforme)

[1] F.Filbet, P.Laurençot, SIAM J. SCI. COMPUT. (2004)

Validation 1D : noyau constant $(H = 1)$

$$f_0(x) = \exp(-x), \quad \mathcal{M}_0(t) = \frac{2}{2+t}, \quad \mathcal{M}_1(t) = 1.$$

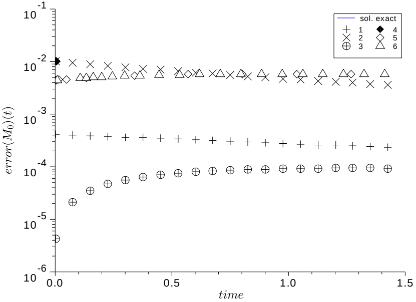


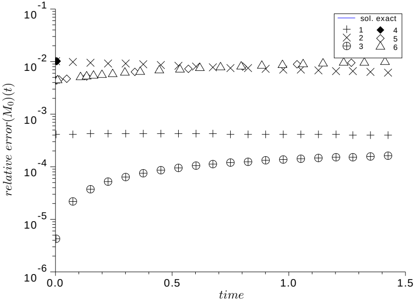


$1, 2, 3$	: troncature $R = 50$,	$\Delta x = 0.1$, 0.5 et 0.01
4	: troncature $R = 2500$,	$\Delta x = 0.5$
5	: troncature $R = 5000$,	$x_i = R.2^{\frac{i-N}{3}}$, nb pts $= 150$
6	: troncature $R = 500000$,	$x_i = R.2^{\frac{i-N}{3}}$, nb pts $= 165$

Validation 1D : noyau constant ($H = 1$)

$$f_0(x) = \exp(-x), \;\; \mathcal{M}_0(t) = \frac{2}{2+t}, \;\; \mathcal{M}_1(t) = 1.$$





$1, 2, 3$	: troncature $R = 50$,	$\Delta x = 0.1,\ 0.5$ et 0.01
4	: troncature $R = 2500$,	$\Delta x = 0.5$
5	: troncature $R = 5000$,	$x_i = R.2^{\frac{i-N}{3}}$, nb pts $= 150$
6	: troncature $R = 500000$,	$x_i = R.2^{\frac{i-N}{3}}$, nb pts $= 165$

Validation 1D : gélation ($H(x,x') = xx'$)

Donnée initiale : $f_0(x) = \dfrac{exp(-x)}{x}$

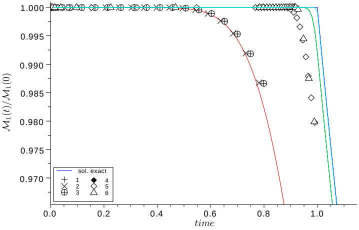
solution : $f(x,t) = exp(-Tx)\dfrac{I_1(2x\sqrt{t})}{x^2\sqrt{t}}$

avec I_1 fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 1 et

$$T = \begin{cases} 1+t & \text{si } t \leq 1 \\ 2\sqrt{t} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ t^{-1/2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Validation 1D : gélation ($H(x, x') = xx'$)



$$\mathcal{M}_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ t^{-1/2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} 1,2,3 : \text{ troncature } R = 50, & \Delta x = 0.1,\ 0.5 \text{ et } 0.01 \\ 5 \quad : \text{ troncature } R = 5000, & x_i = R.2^{\frac{i-N}{3}}, \text{ nb pts} = 150 \\ 6 \quad : \text{ troncature } R = 500000, & x_i = R.2^{\frac{i-N}{3}}, \text{ nb pts} = 165 \end{array}$$

Modèle (2D)

- Équation de coalescence 2D
  $\vec{x} = (x, y)$, alors

$$\partial_t f(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^y H(\vec{x} - \vec{x}', \vec{x}', t) f(\vec{x}', t) f(\vec{x} - \vec{x}', t) \mathrm{d}y' \mathrm{d}x' -$$

$$- \int_0^\infty \int_0^\infty H(\vec{x}, \vec{x}', t) f(\vec{x}', t) f(\vec{x}, t) \mathrm{d}y' \mathrm{d}x'$$

- Moments : $\mathcal{M}_{i,j} = \int_0^\infty \int_0^\infty x^i y^j f(x, y, t) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$
- Quantités conservées : $\mathcal{M}_{0,1}$ et $\mathcal{M}_{1,0}$, les moments d'ordre 1
- $\mathcal{M}_{0,0}(t) \searrow$, $\mathcal{M}_{i,j}(t) \nearrow \quad \forall i + j > 1$

Passage au 2D numérique

- Conservation d'une seule quantité possible, tout comme dans [2] qui travaille sur l'équation conservative du problème.
- Chevauchement de la même façon qu'en 1D pour chaque coordonnée

[2] S. Qamar, G. Warnecke, Chem. Eng. Sci. (2007)

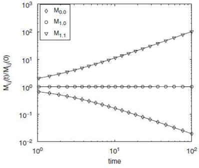
[3] R. Kumar, J.Kumar, G. Warnecke, Comput. and Chem. Eng. (2010)

- [2] (adaptation 2D de [1])
- comparaison sur maillage non-uniforme avec noyau constant $(H(x,y,x',y',t)=1)$
  Donnée initiale : $f_0(x,y)=exp(-x-y)$,
  solution : $f(x,y,t)=\dfrac{4}{(t+2)^2}exp(-x-y)I_0\left(\sqrt{\dfrac{4txy}{t+2}}\right)$
  I_0 : fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre 0.
  $\mathcal{M}_{0,0}=\dfrac{2}{2+t},\quad \mathcal{M}_{1,0}=1,\quad \mathcal{M}_{1,1}=1+t$

[1] F.Filbet, P.Laurençot, SIAM J. SCI. COMPUT. (2004)
[2] S. Qamar, G. Warnecke, Chem. Eng. Sci. (2007)
[3] R. Kumar, J.Kumar, G. Warnecke, Comput. and Chem. Eng. (2010)

Comparaison schéma 2D

[2] | solution exacte | [FC-M]



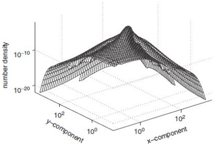
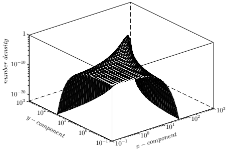
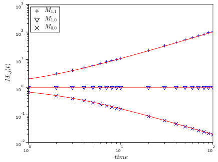
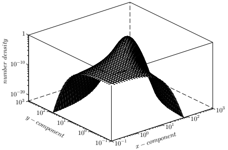


Fig. 6. Two-component aggregation in Problem 5.



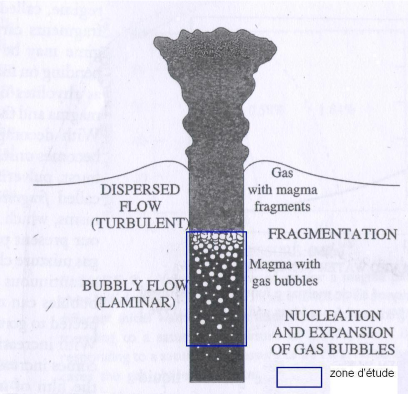




[2] S. Qamar, G. Warnecke, Chem. Eng. Sci. (2007)

[FC-M] en préparation

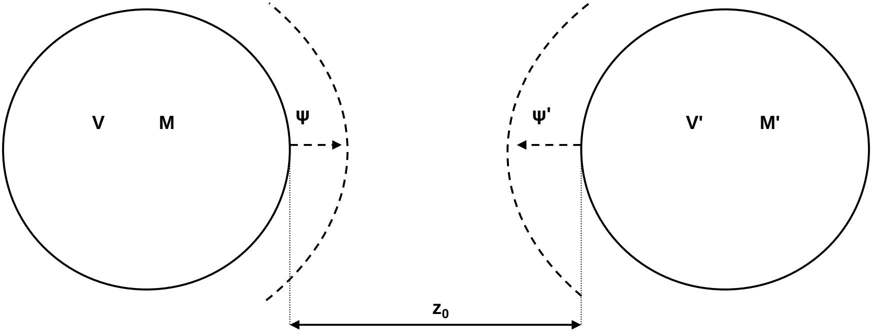
Problème physique



- expériences récentes
- magma visqueux
- polydisperse
- nucléation $\longrightarrow$ percolation
- vaporisation, décompression et coalescence
- $200 - 60\ MPa$, $1000 - 1300\ K$

Modèle volcanologique

$$H(v, m, v', m', t) = \left(\frac{\Psi + \Psi'}{z_0}\right)_+$$



Modèle volcanologique

$$H(v, m, v', m', t) = \left(\frac{\Psi + \Psi'}{z_0}\right)_+$$

avec

$$\Psi = \frac{1}{\Theta_V}\left(\frac{m}{v^{2/3}} - v^{1/3}(1-t) - \Sigma\right)$$

$$z_0 = (v^{1/3} + (v')^{1/3})\left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/3} - 1\right]$$

où

$$\int_0^\infty \int_0^\infty v f(v, m, t) \mathrm{d}m \mathrm{d}v = C_v \frac{\alpha}{1-\alpha}$$

Σ, Θ_V et C_v sont des constantes physiques.

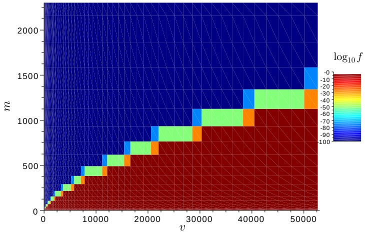
Problème physique 2D

Propriété 1

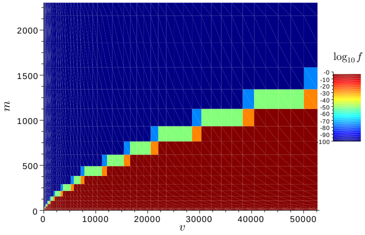
Les fonctions

$$f(v,m,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } m > \Sigma v^{2/3} \\ g(v,m) & \text{sinon} \end{cases}$$

sont les seules solutions stationnaires pour le noyau précédent.



$t = 0$

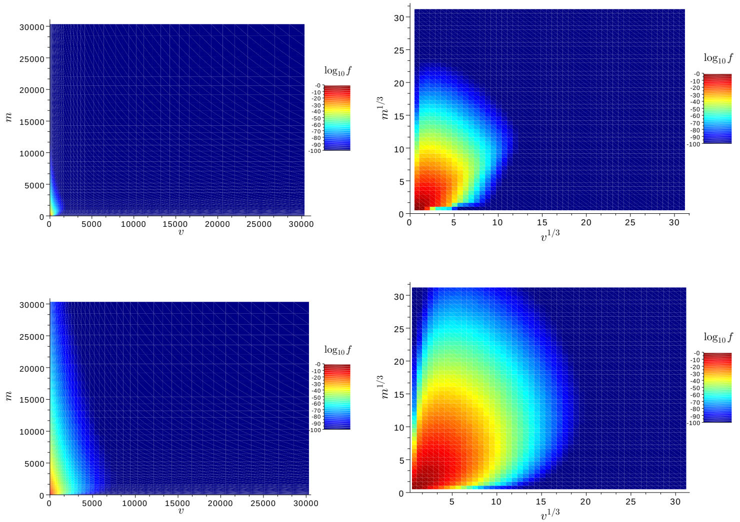


$t = 0.8$

$$f_0(v, m) = exp(-(v-1)^2 - (m - 1/2)^2)$$

$t = 0.03$

$t = 0.99$



Conclusions

- modèle de coalescence 1 et 2D
- chevauchements pris en compte
- schéma conservatif 1D et 2D
- schéma robuste
- application volcanologique

Perspectives

- affiner le chevauchement
- coupler avec un terme de transport
  $\partial_t f + \partial_v(a(t,v,m)f) + \partial_m(b(t,v,m)f) = Q(f)$
- validation expériences 2D
- prendre en compte d'autre conservation.