Résolution numérique de problème elliptique en domaines perforés

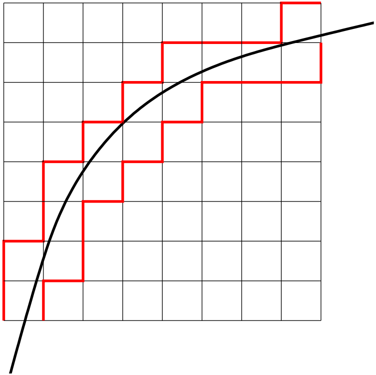
B. Fabrèges, B. Maury

Université d'Orsay

23 Mai 2011

Soit Ω le carré unité et $\mathcal{B}$ une boule inclue dans Ω

$$\left| \begin{array}{lcll} -\Delta u & = & 1 & \Omega \setminus \mathcal{B} \\ u & = & 0 & \partial\Omega \\ u & = & 0 & \gamma = \partial\mathcal{B} \end{array} \right.$$



Prolonger la solution au domaine fictif :

- L'erreur d'approximation d'un prolongement non régulier de la solution sur un maillage non conforme est d'ordre $1/2$
- Trouver un prolongement du terme source compatible avec la contrainte.

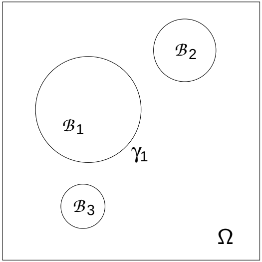
Objectifs de la méthode :

- Utiliser des solver rapides.
- Récupérer l'ordre optimal de l'erreur.

Problème jouet

La présentation est basée sur une version scalaire du problème de Stokes et de la contrainte de mouvement rigide que l'on souhaite résoudre.

$$
\mathcal{P} \left| \begin{array}{lcll} -\Delta u & = & f & \text{in } \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}} \\ u & = & 0 & \text{on } \partial\Omega \\ u & = & V_i & \text{on } \gamma_i = \partial\mathcal{B}_i \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} \nabla u \cdot n_i & = & 0 & \end{array} \right.
$$



où :

$$f \in L^2(\Omega \setminus \mathcal{B})$$

$$\mathcal{B} = \sqcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}_i$$

Idée : On choisi un prolongement L^2 de f. Soit g dans $L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} f &= 0 \text{ in } \mathcal{B} \\ supp(g) &= \mathcal{B} \end{aligned}$$

On considère le problème suivant :

$$\mathcal{P}_g \left| \begin{array}{lcll} -\Delta u_g & = & f+g & \\ u_g & = & 0 & \text{on } \partial\Omega \end{array} \right.$$

On cherche alors une fonction $g \in L^2(\mathcal{B})$ telle que $u_g\big|_{\Omega\setminus\bar{\mathcal{B}}}$ est la solution de $\mathcal{P}$.

Existence

Proposition

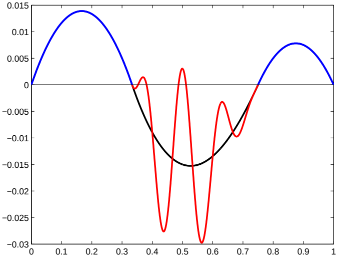
Il existe une fonction $g \in L^2(\mathcal{B})$ telle que la restriction de la solution du problème $\mathcal{P}_g$ à $\Omega \setminus \bar{\mathcal{B}}$ est la solution du problème $\mathcal{P}$.

Preuve :
Les bords γ_i sont tous régulier, il existe donc un prolongement $\tilde{u}$ dans H^2 de la solution exacte du problème u. Ainsi la fonction définie par :

$$g = -\Delta \tilde{u}$$

est un contrôle qui convient.

- Il n'y a pas unicité du contrôle :



Soit Ψ dans $H_0^2\mathcal{B}$) et g dans $L^2(\mathcal{B})$ telles que $u_g\big|_{\Omega\setminus\bar{\mathcal{B}}}$ est la solution du problème $\mathcal{P}$. La restriction de $u_{g+\Delta\Psi}$ donne aussi la solution du problème $\mathcal{P}$.

- L'équation

$$\int_{\gamma_i} \nabla u \cdot n = 0$$

est satisfaite, pour tout les trous, par la solution u_g du problème $\mathcal{P}_g$, si et seulement si on a

$$\int_{\mathcal{B}_i} g = 0$$

Fonction coût

L'inconnue V_i s'exprime en fonction de u de la façon suivante :

$$V_i = \frac{1}{|\gamma_i|} \int_{\gamma_i} u$$

On veut alors minimiser la fonctionnelle quadratique suivante :

$$J(g) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{\gamma_i} \left(u_g - \frac{1}{|\gamma_i|} \int_{\gamma_i} u_g \right)^2$$

sur l'espace contraint :

$$K = \left\{ g \in L^2(\mathcal{B}) \; ; \; \int_{\mathcal{B}_i} g = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \right\}$$

Gradient

Proposition

Soit w_g la solution du problème suivante :

$$\mathcal{W}_g \left| \begin{array}{rcll} -\Delta w_g & = & \varphi_g \, \delta\gamma & \Omega \\ w_g & = & 0 & \partial\Omega \end{array} \right.$$

où φ_g est dans $L^2(\gamma)$ et est définie sur chaque γ_i par :

$$\varphi_g = u_g|_{\gamma_i} - \frac{1}{|\gamma_i|} \int_{\gamma_i} u_g$$

Le gradient de J en g dans la boule $\mathcal{B}_i$ est alors donné par

$$\nabla J(g)\Big|_{\mathcal{B}_i} = w_g\Big|_{\mathcal{B}_i} - \frac{1}{|\mathcal{B}_i|} \int_{\mathcal{B}_i} w_g$$

Algorithme

On utilise un algorithme de gradient conjugué pour minimiser la fonction coût. Pour trouver le gradient à chaque pas on suit l'algorithme suivant : étant donné une fonction g_k,

1. On résout $\mathcal{P}_{g_k}$

$$\mathcal{P}_k \left| \begin{array}{lcll} -\Delta u_k & = & f + g_k & \Omega \\ u_k & = & 0 & \partial\Omega \end{array} \right.$$

2. On peut alors construire φ_k et résoudre $\mathcal{W}_{g_k}$

$$\mathcal{W}_k \left| \begin{array}{lcll} -\Delta w_k & = & \varphi_k \delta_\gamma & \Omega \\ w_k & = & 0 & \partial\Omega \end{array} \right.$$

3. On projète w_k sur l'espace K pour obtenir le gradient.

Approximation de la distribution simple couche

On approche la distribution simple couche par une somme de Dirac :

$$\varphi_h^{\tilde{h}} = \sum_{i=1}^{N_{\tilde{h}}} \lambda_i \delta_{x_i}$$

Où

$$\lambda_i = \langle \varphi \, , \, \mathbb{1}_{\Gamma_i} \rangle$$

Proposition

Soit $0 < s < 1/2$ et $\varphi \in H^{-1/2+s}(\gamma)$. Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\left| \langle \varphi - \varphi_h^{\tilde{h}}, v_h \rangle \right| \leq C \sqrt{\frac{\tilde{h}}{h}} \, \tilde{h}^s \, \|\varphi\|_{-1/2+s,\gamma} |v_h|_{1,\Omega}$$

pour toute fonction test et où $\langle . \, , \, . \rangle$ dénote le crochet de dualité entre $H^{-1/2+s}(\gamma)$ et $H^{1/2-s}(\gamma)$.

On a l'inégalité suivante :

$$\left|\langle \varphi - \varphi_h^{\tilde h}, v_h \rangle\right| \leq \|\varphi\|_{-1/2+s,\gamma} \, \|v_h - \sum_{i=1}^{N_{\tilde h}} v_h(x_i) \mathbb{1}_{\gamma_i}\|_{1/2-s,\gamma}$$

Lemme

Soit I l'interval unité $(0,1)$, $h > 0$, and (T_h) une discrétisation quasi-uniforme de I. On représente T_h par ses sous intervals $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$. On a donc :

$$ch \leq |\gamma_i| \leq Ch, \text{ avec } 0 < c < C.$$

On considère alors $x_1, \ldots, x_N$, avec $x_i \in \gamma_i$. Pour tout $v \in H^1(I)$, on note v_h son interpolation constante par morceaux.

$$v_h = \sum_{i=1}^{N} v(x_i) \mathbb{1}_{\gamma_i}$$

Pour tout r, $0 < r < 1/2$, on a

$$\|v - v_h\|_{H^r} \leq Ch^{1-r} |v|_1$$

où $|v|_1$ est la semi-norme H^1, et la norme fractionnelle est définie par

$$\|w\|_{H^r} = \left(\int_I |w|^2 + \int_I \int_I \frac{|w(y) - w(x)|^2}{|y - x|^{1+2r}} \right)^{1/2}. \quad 0 < r < 1/2,$$

Erreur H^1 du problème $\mathcal{P}_g$

On applique le premier lemme de Strang au problème du gradient :

$$\|w - w_h\| \leq C \left(\inf_{v_h \in V_h} \|w - v_h\| + \sup_{z_h \in V_h} \frac{|\varphi(z_h) - \varphi_h(z_h)|}{\|z_h\|} \right)$$

On prend $\tilde{h} = h^{\frac{3}{1+2s}}$ pour avoir une erreur d'approximation de la distribution simple couche d'ordre 1.

- L'erreur H^1 est d'ordre $1/2$ à cause du saut des dérivées normales.
- En utilisant un lemme de Aubin-Nitsche, on montre que l'on a une erreur d'ordre 1 en norme L^2.
- On applique le premier lemme de Strang au problème $\mathcal{P}_g$ ce qui montre que l'erreur H^1 est d'ordre 1.

$$\|u - u_h\| \leq C \left(\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| + \sup_{z_h \in V_h} \frac{|(g - g_h, z_h)|}{\|z_h\|} \right)$$

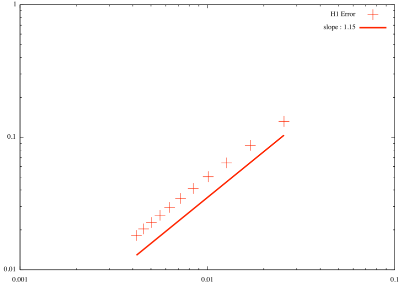
L'erreur H^1 est d'ordre 1 bien que l'on ait une erreur d'ordre $1/2$ en norme H^1 pour le problème du gradient.

Soit

$$u_0 = log\left(\frac{r}{R}\right)$$

la solution exacte du problème suivant :

$$\left|\begin{array}{llll} -\Delta u & = & 0 & \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}} \\ u & = & 0 & \gamma \\ u & = & u_0 & \partial\Omega \end{array}\right.$$



Erreur H^1 d'ordre 1

$$\left|\begin{array}{lcll} -\Delta u + \nabla p & = & f & \text{in } \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}} \\ \nabla \cdot u & = & 0 & \text{in } \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}} \\ u & = & 0 & \text{on } \partial\Omega \\ u & = & V_i + \omega_i \wedge r_i & \text{on } \gamma_i = \partial\mathcal{B}_i \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} \sigma \cdot n_i & = & \int_{\gamma_i} F_i & \\ \displaystyle\int_{\gamma_i} r_i \wedge \sigma \cdot n_i & = & \int_{\gamma_i} r_i \wedge F_i & \end{array}\right.$$

- Code C++ utilisant la librairie Petsc (avec **Loïc Gouarin**)
- Éléments finis : $4Q_1 - Q_1$.
- On utilise un MINRES pour résoudre les problèmes de Stokes.
- Préconditionnement diagonal par bloc :
  - Vitesse : Matrice du Laplacien scalaire en différence finie. Les systèmes linéaire sont résolus avec des FFT.
  - Pression : La diagonale de la matrice de masse en pression.

  Le nombre d'itérations est alors indépendant du pas h du maillage.

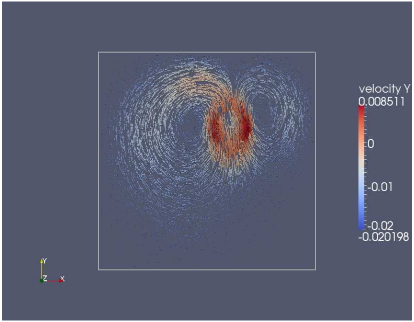


Figure: Une particule, taille de la grille : $2^{10} \times 2^{10}$

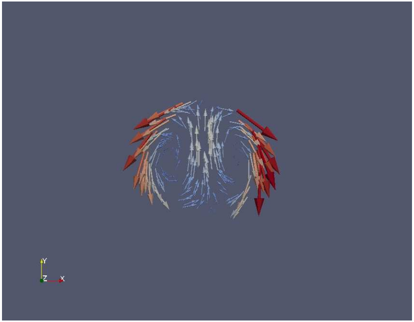


Figure: Contrôle dans une particule