Limites oscillantes
avec spectre variable

E. Grenier

Ecole Normale Supérieure de Lyon

en collaboration avec Y. Guo et B. Pausader (Brown University)

Exemple 1: fluides faiblement compressibles

Question: comment passer des équations compressibles aux équations incompressibles ?

Phyiquement:

- Nombre de Mach: vitesse typique du fluide / vitesse du son
- Voiture: 50 km/h / 1200 km/h = 1/20
- Avion = 800 km/h / 1200 km /h = 0.66
- Limite Mach $\to 0$:
  + le flot est quasiment incompressible
  + il faut ajouter des ondes acoustiques

Mathématiquement:

- Point de départ: équations d'Euler ou de Navier Stokes compressibles.
- Vitesse typique $\ll$ vitesse du son
- Nombre de Mach est un petit paramètre
- Limite = équations incompressibles
- Correction = acoustique

Exemple 1: fluides faiblement compressibles / limite formelle

Equations initiales

$$\partial_t \rho + \nabla.(\rho u) = 0$$
$$\partial_t u + \nabla(u \otimes u) + \nabla p(\rho) = 0$$

Changement d'échelle de temps

$$u(t,x) = \varepsilon . U(\varepsilon\, t, x)$$

conduit à

$$\partial_t \rho + \nabla.(\rho U) = 0$$
$$\partial_t U + \nabla(U \otimes U) + \frac{\nabla p(\rho)}{\varepsilon^2} = 0$$

Limite incompressible

$$Mach = \varepsilon \to 0$$

donne formellement

$$\nabla p(\rho) = 0$$

c'est-à-dire ρ est une constante

$$\rho = 1$$

De plus

$$\nabla . U = 0$$

et

$$\partial_t U + \nabla(U \otimes U) + \nabla q = 0.$$

(on notera u à la place de U).

Exemple 1: fluides faiblement compressibles / limite formelle

$$\psi = \frac{\rho - 1}{\varepsilon}$$

conduit à

$$\partial_t \psi + \nabla.(\psi u) + \frac{\nabla.u}{\varepsilon} = 0$$

$$\partial_t u + \nabla(u \otimes u) + \nabla h(\psi) + p'(1)\frac{\nabla \psi}{\varepsilon} = 0$$

somme d'une équation d'onde

$$\partial_t \sigma + \nabla.v = 0$$

$$\partial_t v + p'(1)\nabla \sigma = 0$$

et d'une équation non linéaire

Notation $\partial_t(\psi, u) = Q(\psi, u) + \varepsilon^{-1} L(\psi, u)$

Echelles de temps:

* $O(1)$: **évolution du fluide**
* $O(\varepsilon)$: **évolution des ondes. Vitesse du son** $= 1/Mach$.

Conjecture: **la partie incompressible de** u **converge vers une solution d'Euler incompressible.**

Difficulté: **les dérivées temporelles ne sont pas bornées.**

Exemple 1: fluides faiblement compressibles / bibliographie

*** S. Klainerman, A. Majda: existence sur un intervalle de temps indépendant du nombre de Mach.**

*** S. Klainerman, A. Majda: convergence pour des données initiales bien préparées ($\psi = O(Mach)$, $\nabla.u = O(Mach)$).**

*** S. Ukai: espace entier: les ondes sonores partent à l'infini sur des échelles de temps $O(Mach)$**

*** S. Schochet: limite incompressible dans le cas périodique pour des données initiales arbitraires.**

*** E. Grenier: fluides en rotation**

*** B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions, N. Masmoudi: limite incompressible pour des fluides visqueux dans des domaines bornés.**

*** B. Desjardins, E. Grenier: limite incompressible pour les solutions faibles dans l'espace entier, en utilisant des estimations de Strichartz.**

*** I. Gallagher: limites oscillantes pour des systèmes paraboliques**

*** Babin, Mahalov, B. Nikolaenko: fluides tournants**

Exemple 1: fluides faiblement compressibles / équation d'onde

Etape 1: résolvante de l'équation d'onde

$\mathcal{L}(t)(\sigma_0, v_0)$ solution de

$$\partial_t \sigma + \nabla . v = 0$$
$$\partial_t v + \nabla \sigma = 0$$

avec donnée initiale (σ_0, v_0).

L'expression de $\mathcal{L}(t)$ est explicite en Fourier.

La relation de dispersion est fixe (spectre fixe)

$$\omega(k) = |k|.$$

$\mathcal{L}(t)$ est une isométrie de H^s vers H^s dans les cas suivants

- cas périodique (tore)

- espace entier

ceci grâce à l'expression explicite de la solution de l'équation d'onde.

Exemple 1: fluides faiblement compressibles / conjugaison

Etape 2: équation conjuguée

Equations initiales

$$\partial_t(\psi, u) = Q(\psi, u) + \varepsilon^{-1}(\nabla.u, \nabla\psi).$$

Nouvelles variables

$$(\bar{\psi}, \bar{u}) = \mathcal{L}(-t/\varepsilon)(\psi, u)$$

Equation sur les nouvelles variables

$$\partial_t(\bar{\psi}, \bar{u}) + \mathcal{L}(-t/\varepsilon)Q\Big(\mathcal{L}(t/\varepsilon)(\bar{\psi}, \bar{u})\Big) = 0$$

Les dérivées temporelles de ψ et u sont bornées.

Etape 3: compacité

+ $\partial_t(\bar{\psi}, \bar{u})$ **sont bornées. Les dérivées spatiales sont aussi bornées.**

+ **Convergence de $\bar{\psi}^\varepsilon$ et $\bar{u}^\varepsilon$.**

Exemple 1: fluides faiblement compressibles / conjugaison

Etape 4: équation limite

- **la projection $\Pi\bar{u}$ sur les champs à divergence nulle satisfait les équations d'Euler incompressibles.**
- $(1-\Pi)\bar{u}$ **et** $\bar{\psi}$ **satisfont une équation décrivant l'évolution des modes acoustiques**
  - \+ **couplage non linéaire entre modes résonants** $\omega(k_1)+\omega(k_2)=\omega(k_3)$ **with** $k_1+k_2=k_3$,
  - \+ **interaction avec le flot limite** $\Pi\bar{u}$.

- **Description de la solution**

$$(\psi,u)=\mathcal{L}(\varepsilon^{-1}t)(\bar{\psi},\bar{u})+o(1)_{L^2}$$

  - \+ **La limite faible** u **est** $\bar{u}$.
  - \+ **La limite faible de** ψ **est** 0.

- **Physiquement: limite incompressible + ondes acoustiques rapides d'amplitude** $O(1)$ **en interaction.**

Exemple 1: fluides faiblement compressibles / importance de la géomètrie

- **Espace entier:**

  + **Physiquement: les ondes sonores vont à l'infini avec la vitesse** $1/\varepsilon$

  + **Mathématiquement: sur tout compact** $\mathcal{L}(\varepsilon^{-1}t)(\psi_0, u_0) \to 0$ **pour toute norme raisonnable**

  + **Conséquence:** $(\psi, u) = (0, \Pi u_0)+$ **couche limite initiale** $+o(1)$.

- **Cas périodique:**

  + **Physiquement: les ondes restent confinées**

  + $\mathcal{L}$ **ne converge pas vers** 0

- **Domaine borné avec viscosité:**

  + **Physiquement: apparition de couches limites avec forte dissipation.**

  + $\mathcal{L}$ **tend vers** 0 **comme dans l'espace entier.**

Exemple 2: fluides inhomogènes

Equations:

$$\partial_t \rho + \nabla.(\rho u) = 0,$$
$$\rho(\partial_t u + u.\nabla u) + \nabla p = 0,$$
$$\partial_t S + u.\nabla S = 0.$$

S **entropie,** p **donnée par la loi d'état**

$$\rho = R(p, S).$$

Exemple

$$\rho = p^{1/\gamma} e^{-S/\gamma}.$$

Changement de variables (Métivier): (p, u) **puis**

$$p = \bar{p} e^{Mach.q}$$

$$a(\partial_t q + u.\nabla q) + \frac{1}{Mach} \nabla.u = 0,$$
$$r(\partial_t u + u.\nabla u) + \frac{1}{Mach} \nabla q = 0$$
$$\partial_t S + u.\nabla S = 0$$

Exemple 2: fluides inhomogènes / limite formelle

Equation limite

$$\begin{aligned} \nabla . u &= 0, \\ \nabla q &= 0, \\ r(\partial_t u + u.\nabla u) + \nabla \Pi &= 0 \\ \partial_t S + u.\nabla S &= 0 \end{aligned}$$

avec $\rho = R(\bar{p}, S)$ **et** $r(S)$

Equation des ondes

$$\partial_t(\sigma, v) = \frac{\mathcal{A}(\sigma, v)}{Mach}$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1}(S)\nabla . \\ r^{-1}(S)\nabla & 0 \end{pmatrix}.$$

ce qui conduit à

$$\varepsilon^2 \partial_{tt}\sigma - \nabla.(S(t,x)^{-1}\nabla\sigma) = 0.$$

Remarque: $\partial_t S$ **est borné**

Difficulté: équation d'onde avec des coefficients variables en temps et en espace

+ **G. Métivier, S.Schochet: résultats sur des systèmes tronqués**
+ **Approximation adiabatique**

Exemple 2: fluides inhomogènes / équation des ondes

Problème:

$$\partial_{tt}\sigma - \varepsilon^{-2}\nabla.(S(t,x)^{-1}\nabla\sigma) = 0.$$

Soit $\mathcal{L}(t,t',\varepsilon)$ sa résolvante. On veut borner $\mathcal{L}(t,t',\varepsilon)$ uniformément en ε de H^s vers H^s.

Estimations d'énergie:

*** L^2: estimation naturelle d'énergie**
*** H^1: $\partial_t\sigma$ satisfait une équation d'onde avec terme source non borné**

Décomposition spectrale

Problème: les coefficients dépendent du temps

Problème: possibilité de croisements de valeurs propres

Peut être très complexe !....... $\rightarrow$ échange d'énergie entre les modes

Résultats génériques: "pour presque toute donnée initiale"

Exemple 2: fluides inhomogènes / décomposition spectrale

Oublions la dépendance temporelle de $S(t,x)$

$$\partial_{tt}\sigma - \varepsilon^{-2}\nabla.(S(x)^{-1}\nabla\sigma) = 0$$

Spectre:

$-\nabla.(S(x)^{-1}\nabla)$ **est auto adjoint**

Valeurs propres λ_j (simples ou multiples)

Π_j **espace propre correspondant,** ψ_j **base orthonormale**

Géometrie des espaces propres:

+ **Valeurs propres doubles**

$$\Sigma_{j,k} = \left\{\lambda_j(S) = \lambda_k(S)\right\}.$$

+ **Près d'une valeur propre double**

$$\Pi_j + \Pi_k$$

est continu, mais ni ψ_j ni ψ_k ne le sont.

Exemple 2: fluides inhomogènes / $\Sigma_{j,k}$ est de codimension 2

Heuristiquement: $\Sigma_{j,k}$ est de codimension 2

Les matrices symétriques ayant une valeur propre double sont de codimension 2

En dimension 2 ....

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique

$$X^2 - (a+c)X + ac - b^2$$

Valeurs propres

$$\frac{a+c}{2} \pm \frac{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2}$$

Ainsi

$$\Sigma_{j,k} = \{b = 0, a = c\}$$

est une ligne dans un espace de dimension 3

$+$ **Les vecteurs propres dépendent de $x - \Pi x$ où Π est la projection sur $\Sigma_{j,k}$.**

$+$ **Les vecteurs propres tournent quand on tourne autour de $\Sigma_{j,k}$.**

Exemple 2: fluides inhomogènes / $\Sigma_{j,k}$ est de codimension 2

- Si λ_j and λ_k sont simples, avec croisement sur $\Sigma_{j,k}$

- Etude locale: si $S_0 \in \Sigma_{j,k}$ alors $\lambda_j(S_0+S)$ et $\lambda_k(S_0+S)$ sont données localement par

$$\frac{\lambda_j(S_0)+\lambda_k(S_0)}{2} + \frac{1}{2}\Big(\int S|\nabla\psi_j|^2 + \int S|\nabla\psi_k|^2\Big)$$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\Big(\int S|\nabla\psi_j|^2 - \int S|\nabla\psi_l|^2\Big)^2 + 4\Big(\int S\nabla\psi_j\nabla\psi_k\Big)^2} + O(|S|^2_{H^s}).$$

- Si

$$|\nabla\psi_j|^2 - |\nabla\psi_l|^2 \quad \textbf{et} \quad \nabla\psi_j\nabla\psi_k$$

sont linéairement indépendants, $\Sigma_{j,k}$ est localement de codimension 2.

Exemple 2: fluides inhomogènes / en dehors des $\Sigma_{j,k}$

Equation

$$\partial_{tt}\sigma - \varepsilon^{-2}\nabla.(S(t,x)^{-1}\nabla\sigma) = 0$$

Décomposition

$$\sigma(t) = \sum_j \alpha_j(t)\psi_j(S(t)) \exp\Big(\varepsilon^{-2}\int_0^t \lambda_j(S(t))\Big).$$

On a

$$\partial_t\alpha_j = -\Big(\sum_k \alpha_k(t)\nabla\psi_k(S(t)).S'(t) \quad | \quad \psi_j(S(t))\Big).$$

Tout est borné loin des $\Sigma_{j,k}$!

Si $S(t)$ évite les valeurs propres doubles, $\mathcal{L}$ est borné.

On introduit $(\tilde{q},\tilde{u}) = \mathcal{L}(\varepsilon^{-1}t)(q,u)$, dont toutes les dérivées sont bornées $\rightarrow$ compacité $\rightarrow$ convergence

Equation limite: attention aux résonances !

Exemple 2: fluides inhomogènes / résonances

Définition:

$$\Sigma_{j,k,l} = \{S \quad | \quad \lambda_j(S) + \lambda_k(S) = \lambda_l(S)\}.$$

- **Heuristiquement: $\Sigma_{j,k,l}$ est de codimension 1.**

- **Si λ_k est une valeur propre simple**

$$d\lambda_i(S).\tilde{S} = \int |\nabla\psi_j|^2 \tilde{S}.$$

- **Normale à $\Sigma_{j,k,l}$ est**

$$|\nabla\psi_j|^2 + |\nabla\psi_k|^2 - |\nabla\psi_l|^2$$

(si différent de 0)

Exemple 2: fluides inhomogènes / résonances

Si la limite $S(t)$ ne rencontre aucun $\Sigma_{j,k}$ et croise tous les $\Sigma_{j,k,l}$ transversalement:

- La résolvante $\mathcal{L}$ de l'équation d'onde est uniformément bornée de H^s vers H^s.

- Les solutions corrigées par $\mathcal{L}$ convergent fortement.

- On peut passer à la limite dans les équations.

$\rightarrow$ justification de la limite

Théorème: si $S(t)$ évite tous les $\Sigma_{j,k}$ et croise transversalement tous les $\Sigma_{j,k,l}$, alors $(q^\varepsilon, u^\varepsilon, S^\varepsilon)$ converge faiblement vers une solution des équations d'Euler inhomogènes.

Exemple 2: fluides inhomogènes / équation limite

Difficulté:

- **Equation limite = équation d'Euler incompressible inhomogène *plus* un terme source: interactions non linéaires entre les ondes**

- **Terme source = combinaisons de termes en $\psi_j(S)$ qui sont *singuliers* en $\Sigma_{j,k}$.**

Modèle simple sur C

$$\partial_t u = f(u, |v|, arg(v)),$$
$$\partial_t v = g(u, v)$$

avec f et g régulières.

Résultat d'existence:

Théorème: sous des hypothèses géométriques sur les $\Sigma_{j,k}$, existence d'un flot régulier pour l'équation limite.

Exemple 2: fluides inhomogènes: récapitulatif

Difficultés:

- **Croisement de valeurs propres $\Sigma_{j,k}$**
  + **Codimension 2**
  + **Description locale sous hypothèses spectrales**
- **Résonances $\Sigma_{j,k,l}$**
  + **Codimension 1, croisées transversalement par le flot limite génériquement**
  + **Description locale sous hypothèses spectrales**
- **Equation limite singulière sur les $\Sigma_{j,k}$**
  + **Sous hypothèses spectrales, existence d'un flot régulier.**

Résultat:

Sous hypothèses spectrales, justification du passage à la limite pour *presque toute* **donnée initiale.**

*presque toute***: échange d'énergie entre modes possible sinon.**

Exemple 3: limite de masse nulle

Système d'Euler Poisson:

- **Ions:** n_i **densité,** v_i **vitesse**
- **Electrons:** n_e **densité,** v_e **vitesse,**
- V **potentiel électrique**

Equations

$$\begin{aligned}
\partial_t n_e + \nabla.(n_e v_e) &= 0,\\
\eta^2 n_e(\partial_t v_e + v_e.\nabla v_e) &= -\nabla n_e + n_e \nabla V,\\
\partial_t n_i + \nabla.(n_i v_i) &= 0,\\
n_i(\partial_t v_i + v_i.\nabla v_i) + \nabla\rho + \rho\nabla V &= 0,\\
-\Delta V &= n_i - n_e.
\end{aligned}$$

avec

$$\eta = \frac{m_e}{m_i}$$

petit paramètre (rapport des masses).

Exemple 3: limite de masse nulle / limite formelle

Formellement:

$$\nabla n_e = n_e \nabla V$$

donc

$$n_e = e^{-V}$$

d'où

$$\partial_t n_i + \nabla.(n_i v_i) = 0,$$
$$n_i(\partial_t v_i + v_i.\nabla v_i) + \nabla \rho + \rho \nabla V = 0,$$
$$-\Delta V = n_i - e^{-\phi}.$$

Les électrons ?

- ils se débrouillent pour que $n_e = e^{-V}$

- fortes oscillations en vitesse

Exemple 3: limite de masse nulle / équation des ondes

Description des oscillations

$$
\begin{aligned}
u_e^\eta &= u_e^0 + \tilde{u}_e,\\
n_e^\varepsilon &= n_e^0 + \eta \tilde{n}_e,\\
V^\varepsilon &= V^0 + \eta \tilde{V}.
\end{aligned}
$$

Equations sur $\tilde{u}_e$, $\tilde{n}_e$:

$$\partial_t(\tilde{n}_e, \tilde{u}_e) = \eta^{-1} A(n_e^0(t))(\tilde{n}_e, \tilde{u}_e) + (S_1^\varepsilon, S_2^\varepsilon)$$

avec

$$A(n_e^0)(n,u) = \begin{pmatrix} -\nabla.(n_e^0 u) \\ -\nabla\left(\frac{n}{n_e^0}\right) + \nabla\Delta^{-1} n \end{pmatrix}.$$

Equation d'onde + termes non linéaires

Si $n_e^0 = 1$, l'équation d'onde est

$$\partial_{tt} n + n - \Delta n = 0$$

Exemple 3: limite de masse nulle / équation des ondes

Opérateur A est anti symétrique $\rightarrow$ spectre

$$A(n_e^0)(n,u) = \begin{pmatrix} -\nabla.(n_e^0 u) \\ -\nabla\left(\frac{n}{n_e^0}\right) + \nabla\Delta^{-1}n \end{pmatrix}.$$

Etude du spectre

- **Valeurs propres doubles** $\Sigma_{j,k}$
- **Résonances** $\Sigma_{j,k,l}$
- $\Sigma_{j,k}$ **de codimension 2 (sous hypothèses)**
- **Résonances codimension 1 (sous hypothèses)**

Exemple 3: limite de masse nulle / résultat

Théorème: existence de solutions régulières sur des temps et avec des bornes indépendantes de η.

Théorème: sous des hypothèses spectrales, justification de la limite pour presque toute donnée initiale

Stratégie:

- Etude de la géométrie de $\Sigma_{j,k}$ et $\Sigma_{j,k,l}$

- Existence d'une solution pour le système limite pour toute donnée initiale.

- Cette solution évite $\Sigma_{j,k}$ et $\Sigma_{j,k,l}$ pour presque toute donnée initiale

- Dans ce cas la résolvante de l'équation des ondes est bornée

- Conjugaison

- Passage à la limite.

Conclusion

Contexte: **limite singulière où on s'attend à la propagation d'ondes.**

Introduction de l'équation d'onde associée

- **Spectre indépendant de la solution: conjugaison par la résolvante et passage à la limite pour toute donnée initiale.**
- **Spectre dépendant de la solution:**
  + **Géométrie des croisements de valeurs propres à étudier (codimension 2)**
  + **Géométrie des résonances à étudier (codimension 2 sous transversalité)**

Etude de l'équation limite

+ **peut être singulière sur les $\Sigma_{j,k}$.**

Justification de la limite formelle pour *presque toute* **donnée initiale**